GAS abstract
Spectral theory of linear m-sectorial operators in Banach and Hilbert spaces
– historical review –

岡沢　登 (東京理科大学)

July 27, 2015

非有界な係数関数を持つ 2 階線形楕円型作用素のスペクトル理論は, その L^2 における自己共役性の問題から始まった. 創始者は故加藤敏夫 (Tosio Kato) 教授であり, その記念碑的論文とは [**7**] (1951) である. その結果は 1944 年頃には得られていたというが, 戦中, 戦後の混乱とはじめ物理の雑誌に投稿されたものが最終的に Transactions (AMS) の referee に救われるまでに 7 年の歳月が流れてしまったようである ([**10**, 28 節]). この論文で加藤教授は, 史上初めて現実の物理の問題である量子力学的 Kepler 問題の Hamiltonian の自己共役性を証明された. これから水素原子の発する光のスペクトルの説明が基礎付けられる. 実際, von Neumann の「量子力学の数学的基礎」[**29**](1932) によれば物理量 (observable) とは自己共役作用素が定める期待値の形で観測されるからである. しかし [**29**] で自己共役性が厳密に示されているのは, 運動量作用素 id/dx と位置作用素 x の 2 つのみである. [**7**] での仕事の核心は, 自己共役作用素の摂動定理を用いてなされた. 加藤教授の著書 [**8**] によれば, その摂動定理は元々F. Rellich が証明していたものであるが, その決定的な応用を見出したのが [**7**] だったという理由で今では **Kato-Rellich の定理**と呼ばれている. その言い出しっぺは, Reed-Simon, Methods of modern mathematical physics, Vol. I–IV (1972/79), の著者のひとりとしても知られる B. Simon だと思われる. Kato-Rellich の摂動定理とは, 自己共役な A に対して対称な摂動 B を加えても, B が A-有界 (詳しくは, B が A に関して**相対有界**)

$$\|Bu\| \le b\|Au\| + a\|u\| \quad \forall\, u \in D(A) \subset D(B) \tag{1}$$

で, 定数 b について $0 < b < 1$ が成立してくれれば $A + B$, $D(A + B) = D(A)$ も自己共役になるというものである (定数 a は任意でよい). $b = 1$ で (1) が成立することもありうるが, そのとき $A + B$ 自身の閉性 (closedness) は失われ, $A + B$ の閉包 $(A + B)\tilde{}$ が自己共役になる ($A+B$ の対称性は, $A + B \subset (A + B)^*$ と表せて, 共役作用素 $(A + B)^*$ は閉作用素である). 3 次元の水素原子のポテンシャル $V(x) := c|x|^{-1}$ は

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x), \quad V_1 \in L^2(\mathbb{R}^3),\ \ V_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$$

と分解することで $-\Delta$ ($D(-\Delta) := H^2(\mathbb{R}^3)$) に関して相対有界になる ($L^\infty(\mathbb{R}^3) \subset H^2(\mathbb{R}^3)$). $-\Delta + c|x|^{-1}$ は, 下の (2) の特別な場合になっている.

自己共役性の証明といった数学的な表現では, その影響の大きさは実感しがたいが, [**7**] によって**量子力学の数理物理**は実際に誕生し, 大きく発展することになる. [**7**] のことは von Neumann も激賞したと伝えられている (2010 年 7 月に Tübingen で偶然 J. Goldstein から口頭でこのことは伝授されたが, 英文で記録されたものでも確認しておきたいところである) が, その後の発展は見届けずに 1957 年に亡くなっている. 加藤教授は, B. Simon のことは (量子力学における数理物理の) 万能選手と評されている ([**10**, 28 節]).

上で Hamiltonian の自己共役性と述べたが, 数学の立場からの研究では (Hamiltonian は使われず), **Schrödinger 作用素**といわれ (いつ頃誰が言い出したのか筆者は確認できていない), それは最も単純なものでは

$$S := -\Delta + V(x) \tag{2}$$

という形をしている (まだ形式的定義に過ぎない). ポテンシャル $V(x)$ の形状によるが, S が固有値を持つことも多く, それが原子の発する光のスペクトルに関係することが, 作用素のスペクトル理論の「名称」の由来なのであろう. よく知られているように水素原子は 1 個の陽子と 1 個の電子からできている. その電子のエネルギー準位が自己共役作用素 (Hamiltonian) の固有値に対応している ($-\Delta + c|x|^{-1}$ では負の固有値列が現れる). このエネルギーが一定で安定した電子の状態は定常状態といわれる (定常状態には基底状態と励起状態がある). 特に, 基底状態は (絶対値が) 最小の固有値に対応している. 何らかの理由で電子のエネルギー準位が, 高い方 $E_{n'}$ から低い方 E_n へ変化したとき, その差 $E_{n'} - E_n$ に相当する周波数の光が射出され, 逆に, 原子が光を吸収すれば電子のエネルギー準位は高くなると説明される. 光の周波数 ν を決めるのは, A. Einstein による光電効果の関係式 $E = h\nu$ (h は Planck 定数) から理解可能な

$$\nu = h^{-1}(E_{n'} - E_n)$$

である (黒田 [**12**, 1.2 節 (b)]). ついでながら, Einstein から Nobel 賞 (光電効果) を引き算しても相対性理論が残るといわれる. [**12**, 1.2 節 (d), 第 4 章] に詳しく述べられている**調和振動子** (上の (2) で $V(x) = |x|^2$) の場合のように固有値問題が完全に解けてしまうこともあるが, これは一般には期待できない. ちょっとだけでも量子力学を知っておかないと, 作用素の固有値がなぜエネルギー (準位) なのかという問を発してしまうことになるだろう.

$V \geq 0$ (かつ $V \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) のときの Schrödinger 作用素 S の最小実現 (minimal realization)

$$S_{\min} u := -\Delta u + V(x)u, \quad D(S_{\min}) := C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{3}$$

の**本質的自己共役性** (in L^2) のために [**9**] で開発された**加藤の不等式**には, L^2 を含む一般の Lebesgue 空間 L^p $(1 < p < \infty)$ で考えた S の本質的極大増大性 (m-accretivity) の証明にも使える普遍性があった. このことをはっきり記したのは 5 年後の Semenov [**25**] である.

$L^2 = L^2(\mathbb{R}^N)$ から $L^p = L^p(\mathbb{R}^N)$ への移行に際し, $-\Delta$ の自己共役性, 特に $(-\Delta u, u)_{L^2}$, $u \in D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$ の非負性がどのように失われるかは興味深いところではないだろうか. $(-\Delta u, u)_{L^2}$ の非負性の喪失は作用素 $(-\Delta)$ の**非対称化**により L^2 内でも起こることである. 実際, 加藤教授はその著書で, この問題を $-\Delta$ から $-\Delta + b \cdot \nabla$ への移行の問題として捉え角型増大性 (sectorialvaluedness) の概念を導入された ([**8**,Section V.3.10]; $p = 2$ のときと $p \neq 2$ のときでその定義に大差はない). L^p 内の作用素 A が**角型増大** (sectorial あるいは sectorially valued) であるとは, 定数 $c > 0$ が取れて

$$|\mathrm{Im}\,\langle Au, F(u)\rangle_{L^p,L^{p'}}| \leq c\,\mathrm{Re}\,\langle Au, F(u)\rangle_{L^p,L^{p'}} \quad \forall\, u \in D(A) \tag{4}$$

が成立することである. ここで,

$$F(v) := \|v\|_{L^p}^{2-p}|v|^{p-2}v, \quad v \in L^p, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ \ (1 < p < \infty) \tag{5}$$

は (正規化された) 双対性写像 $F:\ L^p \to L^{p'}$ である: $\langle v, F(v)\rangle_{L^p,L^{p'}} = \|v\|_{L^p}^2 = \|F(v)\|_{L^{p'}}^2$.
これに対して L^p 内で角型増大作用素の具体例が挙げられるまでには少し時間がかかった.
最初の具体例となった $L^p(\mathbb{R}^N)$ 内の $-\Delta$ については

$$|\mathrm{Im}\,\langle -\Delta u, |u|^{p-2}u\rangle_{L^p,L^{p'}}| \le \frac{|p-2|}{2\sqrt{p-1}}\,\mathrm{Re}\,\langle -\Delta u, |u|^{p-2}u\rangle_{L^p,L^{p'}}, \tag{6}$$

が成立する ([**20**]). ここで, $u \in D(-\Delta) = W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ であり, $F(u)$ の中の因子 $\|u\|_{L^p}^{2-p}$ は省略した. L^p 上の subMarkov 半群の負の生成作用素はすべて $-\Delta$ と同じ (6) を満たす ([**13**]).

ここでは角型増大性を先に定義してしまったが, L^p 内の作用素 A が**増大** (accretive) であるとは, (4) よりはやや緩やかに $\mathrm{Re}\,\langle Au, F(u)\rangle_{L^p,L^{p'}} \ge 0$, 即ち,

$$\mathrm{Re}\,\langle Au, |u|^{p-2}u\rangle_{L^p,L^{p'}} \ge 0 \tag{7}$$

が成立することを意味する. 従って, 角型増大ならば増大ということになる. 特に, A の増大性 (7) に**極大性** (maximality), 即ち, $L^p = R(1+A)$ が追加されて**極大増大** (m-accretive) となった A は, $-A$ が縮小半群

$$\{\exp(-tA);\ t \ge 0\} \tag{8}$$

の生成作用素になることでよく知られているわけである (**Hille-吉田の定理**). A が, **極大角型増大** (m-sectorial) の場合には

$$\left\{\exp(-tA);\ |\arg t| < \pi/2 - \tan^{-1} c = \tan^{-1}(1/c)\right\} \tag{9}$$

は解析的縮小半群を形成する. ここで定数 c は, (4) に現れたものである. (4) の両辺を c で割ってから, $c \to \infty$ とすれば (7) が得られる. これに対し (9) で $c \to \infty$ としたものが (8) ということになる. 極大角型増大作用素について和書では [**5**] のみが取り上げている.

さて, 1960 年代の末には, 非線形半群理論の枠内で (Banach 空間 X にはある種の制限が加わることもあるが) 極大増大作用素の和の極大増大性が議論できるようになった. 即ち, A, B を X 内の 2 つの極大増大作用素としよう. そのとき極大増大な B は, その**吉田近似**といわれる有界作用素の列 $\{B_\varepsilon\}$ で近似ができる:

$$\|Bu - B_\varepsilon u\| = \ \to 0\ \ (\varepsilon \downarrow 0)\ \ \forall\, u \in D(B);$$
$$B_\varepsilon := \varepsilon^{-1}[1-(1+\varepsilon B)^{-1}] = B(1+\varepsilon B)^{-1},\ \ \varepsilon > 0.$$

(これはもちろん Hille-吉田の定理の確立 (1948) のときから周知の事実である.) $A + B_\varepsilon$ の極大増大性は, A, B が非線形であっても縮小写像の定理の応用として証明するのはやさしい. 即ち, 各 $v \in X$ と各 $\varepsilon > 0$ に対して $\{u_\varepsilon\} \subset D(A)$ が存在して

$$u_\varepsilon + Au_\varepsilon + B_\varepsilon u_\varepsilon = v, \quad \varepsilon > 0$$

が成立する. ここで $A + B_\varepsilon$ の増大性から, $\|u_\varepsilon\| \le \|v\|$ は容易に分かる. 従って, 回帰的な空間 X においては $\|Au_\varepsilon\|$ (あるいは $\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|$) の有界性がいえれば, $u := \text{w-lim}\, u_n \in D(A+B)$ が存在して $Au_\varepsilon \to Au$, $B_\varepsilon u_\varepsilon \to Bu$ weakly $(\varepsilon \downarrow 0)$ となることが示せる. これは $A + B$ の極大性: $u + Au + Bu = v$ を意味する. 例えば, $X = L^p$ で $\|Au_\varepsilon\|_{L^p}$ の有界性を導くには

$$\mathrm{Re}\,\langle Au, F(B_\varepsilon u)\rangle_{L^p,L^{p'}} \ge -c\|u\|_{L^p}^2 - a\|u\|_{L^p}\|B_\varepsilon u\|_{L^p} - b\|B_\varepsilon u\|_{L^p}^2 \tag{10}$$

があればよい $(0 < b \le 1)$. 特に, X が Hilbert 空間の場合には, $\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|$ の有界性は, (A, B が非線形のときでさえ)$A+B$ が極大増大であるための**必要十分条件**になっている (Brezis-Crandall-Pazy [**2**]). これが Kato-Rellich の定理のときより広いクラスのポテンシャルV に対して詳しい結果を導くことを可能にしてくれる. 例えば, **調和振動子**の場合, (3) の $S_{\min}$ の本質的自己共役性は加藤の不等式から明らかだが, その閉包 $\tilde{S}_{\min}$ の定義域を

$$D(\tilde{S}_{\min}) = D(\Delta) \cap D(|x|^2) = H^2(\mathbb{R}^N) \cap D(|x|^2)$$

と決定することができる (Sohr [**28**]). ただし, [**28**] では, $V \ge 0$ の吉田近似ではなく $(V+1)^{-1}$ が使われている. $-\Delta + |x|^2$ の閉性 (closedness) の必要十分条件である**分離性の不等式**

$$\|\Delta u\|^2 + \||x|^2 u\|^2 \le \|(-\Delta + |x|^2)u\|^2 + 2\|u\|^2 \tag{11}$$

が示せるからである. 分離性のことを最初に言い出したのは [**3**], [**4**] あたりではないかと思う. 2 つの閉作用素 A, B の和 $A+B$ の閉性の必要十分条件は (11) を少しだけ修正した

$$\|Au\| + \|Bu\| \le k(\|(A+B)u\| + \|u\|) \quad \forall\, u \in D(A+B) := D(A) \cap D(B)$$

でよいことが, 閉グラフ定理に基づき [**6**] と [**1**] で注意されている (三角不等式から $k \ge 1$ が分かる). 残念ながら, これはあまり浸透していないようである.

これまでの具体例は, (6) を除いてすべて L^2 でのものである. 筆者は, 30 年前に上のような観察に基づき [**19**] で (作用素の摂動論というよりは) 作用素和の理論により Schrödinger 作用素 S の (初等的)L^p 理論を始めることができた. 加藤教授も興味を示してくれて [**11**] が残された. 1 階微分の項 $F \cdot \nabla$ を含めた一般の 2 階線形楕円型作用素で非有界な係数を持つものの研究が盛んになってきたのはここ 20 年程のことである. 特に, 最近 10 年以内の [**15**], [**16**], [**17**] の結果の多くは [**26**], [**27**] によってよく整理された形で提供されている. 従って, [**15**]–[**17**] のすべてを実際に執筆したとみなされる G. Metafune 教授が, ポスドクとして側島基宏を受け入れてくれたことは自然な流れではあるが, 感謝の気持ちを忘れてはならないであろう.

筆者は, 簡単な作用素和に関する定理と加藤の不等式に加えて特異摂動の技巧 (ここでは相対有界性が生きてくる) が使える範囲内で (移流項付きの) Schrödinger 作用素

$$\begin{aligned} &S(b,c) := \; -\Delta + b|x|^{-2}(x\cdot\nabla) + V(x), \quad V(x) \ge c|x|^{-2}, \\ &c \ge c_0(b,p,N) := \; \max\Big\{-\frac{N-2}{p}\Big(\frac{N-2}{p'} - b\Big), -\Big(\frac{N}{p} - 2\Big)\Big(\frac{N}{p'} - b\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{12}$$

の L^p 理論をまとめてみたい ($b=0$, $c=0$ のときが [**19**] で, $b=0$, $c \ne 0$ のときが [**20**] で, $b \ne 0$, $c \ne 0$ のときが [**22**] でそれぞれ扱われている). [**20**] での計算は, [**14**] でかなり簡単化され, それは [**22**] の中でも生きている. 筆者が特異な移流項を考えものに [**18**], [**24**] があるが, [**18**] の移流項の条件は先行研究の受け売り, [**24**] は L^2 限定なので省略することにした. 非有界作用素論としては, 最も単純 (simple) な極大増大作用素の和の理論の有効性とその限界が表 (あらわ) になるはずである.

References

[1] J.B. Baillon, Ph. Clement, J. Functional Anal. **100** (1991), 419–434.

[2] H. Brezis, M. Crandall, A. Pazy, Perturbations of nonlinear maximal monotone sets, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 123–144.

[3] W.D. Evans, A. Zettl, Dirichlet and separation results for Schrödinger-type operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A80** (1978), 151–162.

[4] W.N. Everitt, M. Giertz, Inequalities and separation for Schrödinger-type operators in $L_2(\mathbf{R}^N)$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A79** (1977), 257–265.

[5] 藤田　宏・黒田成俊・伊藤清三, 関数解析, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 東京, 1991.

[6] J. Glimm, A. Jaffe, Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 401-414.

[7] T. Kato, Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 195–211.

[8] T. Kato, "Perturbation Theory for Linear Operators," Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[9] T. Kato, Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math. **13** (1972), 135–148.

[10] 加藤敏夫, 量子力学の関数解析, 量子物理学の展望 (下), pp. 669–686, 岩波書店, 東京, 1978.

[11] T. Kato, *L^p-theory for Schrödinger operators with a singular potential*, "Aspects of Positivity in Functional Analysis" (Tübingen, 1985), 63–78, Math. Studies **122**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[12] 黒田成俊, 量子物理の数理, 岩波講座 応用数学, 岩波書店, 東京, 1994; 単行本化 2007.

[13] V.A. Liskevich and M.A. Perelmuter, Analyticity of submarkovian semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1097–1104.

[14] Y. Maeda, N. Okazawa, Holomorphic families of linear m-accretive operators in Banach spaces and application to Schrödinger operators in L^p, SUT J. Math. **47** (2011), 185–216.

[15] G. Metafune, D. Pallara, J. Prüss, R. Schnaubelt, *L^p-theory for elliptic operators on $\mathbb{R}^d$ with singular coefficients*, Z. Anal. Anwendungen **24** (2005), 497–521.

[16] G. Metafune, J. Prüss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, *L^p-regularity for elliptic operators with unbounded coefficients*, Adv. Differential Equations **10** (2005), 1131–1164.

[17] G. Metafune, D. Pallara, P.J. Rabier, R. Schnaubelt, *Uniqueness for elliptic operators on $L^p(\mathbb{R}^N)$ with unbounded coefficients*, Forum Math. **22** (2010), 583–601.

[18] S. Miyajima, N. Okazawa, Generators of positive C_0-semigroups, Pacific J. Math. **125** (1986), 161–175.

[19] N. Okazawa, An L^p theory for Schrodinger operators with nonnegative potentials, J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 675–688.

[20] N. Okazawa, Sectorialness of second order elliptic operators in divergence form, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 701–706.

[21] N. Okazawa, L^p-theory of Schrodinger operators with strongly singular potentials, Japan. J. Math. (N.S.) **22** (1996), 199–239.

[22] N. Okazawa, M. Sobajima, L^p-theory for Schrödinger operators perturbed by singular drift terms, New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations, Chapter 18 (pp. 401–418), Springer INdAM Series **10**, Springer-Verlag, New York, 2014.

[23] N. Okazawa, H. Tamura, T. Yokota, Square Laplacian perturbed by inverse fourth-power potential I. Self-adjointness (real case). Proc. Royal Soc. Edinburgh **141A** (2011), 409–416.

[24] N. Okazawa, T. Yokota, Quasi-m-accretivity of Schrödinger operators with singular first-order coefficients, Discrete Contin. Dynam. Systems **A22** (2008), 1081–1090.

[25] Yu.A. Semenov, Schrodinger operators with L^p_{loc}-potentials, Comm. Math. Phys. **53** (1977), 277–284.

[26] M. Sobajima, *L^p-theory for second-order elliptic operators with unbounded coefficients*, J. Evolution Equations **12** (2012), 957–971.

[27] M. Sobajima, *L^p-theory for second-order elliptic operators with unbounded coefficients in an endpoint class*, J. Evolution Equations **14** (2014), 461–475.

[28] H. Sohr, Uber die Selbstadjungiertheit von Schrödinger-Operatoren. Math. Z. **160** (1978), 255–261.

[29] J. von Neumann, Die Mathematische Grundlangen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932; (和訳) 量子力学の数学的基礎, みすず書房, 東京, 1957.

付録 (L^2 での Hardy および Rellich の不等式). $p=2$ のときに $T_2(c) := -\Delta + c|x|^{-2}$ とその近似作用素の族

$$T_{2,\varepsilon} := -\Delta + \frac{c}{|x|^2+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{(|x|^2+\varepsilon)^2}, \quad c > c_0 = c_0(0,2,N) = -\frac{N(N-4)}{4} \geq -\frac{(N-2)^2}{4}$$

の増大性 (accretivity) と極大性の証明の概略を述べておく. 最後に注意するが, $T_2(c_0)$ については別の議論を要する. $u \in D(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$ のとき $\big((-\Delta)u, u\big) = \|\nabla u\|_{L^2}^2$ だから, まず $T_{2,\varepsilon}$(および $T_2(c)$) の増大性をいうには

(**a**) (近似的) **Hardy の不等式:** $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ のとき部分積分だけで計算できる

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Big|\nabla u(x) + \frac{N-2}{2}\frac{x}{|x|^2+\varepsilon}u(x)\Big|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^2+\varepsilon}dx - \frac{N^2-4}{4}\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{(|x|^2+\varepsilon)^2}dx \end{aligned}$$

を利用すればよい. 実際, 次の評価が得られる:

$$\mathrm{Re}\,(T_{2,\varepsilon}u, u) \geq \Big(c + \frac{(N-2)^2}{4}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^2+\varepsilon}dx + \frac{N^2}{4}\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{(|x|^2+\varepsilon)^2}dx \geq 0.$$

次に, $T_2(c)$ の極大性の証明には, (10) で, $A := -\Delta$, $B := |x|^{-2}$, $p=2$ としたものを作ればよい ($T_{2,\varepsilon}$ は, $-\Delta$ の有界摂動 (bounded perturbation) とみなせるから, その極大性の証明は簡単な議論で間に合う). その (10) というのが

(**b**) (近似的) **Rellich の不等式:** $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ のとき

$$(13) \qquad I := \mathrm{Re}\,\Big(-\Delta u, \frac{u}{|x|^2+\varepsilon}\Big) \geq \frac{N(N-4)}{4}\Big\|\frac{u}{|x|^2+\varepsilon}\Big\|_{L^2}^2 \quad \forall\, u \in H^2(\mathbb{R}^N)$$

である ($B = |x|^{-2}$ のとき $B_\varepsilon = (|x|^2+\varepsilon)^{-1}$ となる). (13) が意味する分離性の不等式

$$\|\Delta u\|_{L^2}^2 + c\Big(c + \frac{N(N-4)}{4}\Big)\Big\|\frac{u}{|x|^2+\varepsilon}\Big\|_{L^2}^2 \leq \Big\|-\Delta u + \frac{c\,u}{|x|^2+\varepsilon}\Big\|_{L^2}^2$$

は $T_2(c)$ の極大性 (閉性を含む) の証明で本質的である. 残念ながら, この分離性の不等式で $c = c_0 = c_0(0,2,N)$ とおくことはできない (従って, $T_2(c_0)$ の閉性はいえない). (13) の左辺で $v := (|x|^2+\varepsilon)^{-1}u$ とおき, $2\,\mathrm{Re}\,\big((x\cdot\nabla)v, v\big) = -N\|v\|_{L^2}^2$ を使うと

$$\begin{aligned} I = \mathrm{Re}\,\big(-\Delta(|x|^2 v + \varepsilon v), v\big) &= \mathrm{Re}\,\big(|x|^2\nabla v + 2x\,v, \nabla v\big) + \varepsilon\|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &= \big\||x|\nabla v\big\|_{L^2}^2 - N\|v\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

が得られる. $\||x|\nabla v\|_{L^2} \geq \|(x\cdot\nabla)v\|_{L^2}$ なので, $\|(x\cdot\nabla)v\|_{L^2} \geq (N/2)\|v\|_{L^2}$ に注意すれば

$$I \geq \|(x\cdot\nabla)v\|_{L^2}^2 - N\|v\|_{L^2}^2 \geq \big[(N^2/4) - N\big]\|v\|_{L^2}^2 = 4^{-1}N(N-4)\|(|x|^2+\varepsilon)^{-1}u\|_{L^2}^2$$

が示せる ([**23**, Lemma 3.3]).