Regular Subgroups of Affine Permutation Groups and Failure of Factorization

宗 政　昭 弘
九州大学数理学研究科

２年程前、標数２の有限体上の n 次交代行列と $n-1$ 次対称行列の間に、rank をほぼ保つ奇妙な一対一対応があることに気がついた。今、

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{pmatrix}$$

を有限体 GF(2^m) 上の n 次交代行列とする。ただし、A は $n-1$ 次の交代行列、$\mathbf{a}$ は $n-1$ 次元ベクトルである。この行列に対し、

$$\varphi(M) = A + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

は $n-1$ 次対称行列になり、しかもこの対応 φ は一対一である。さらに、rank$M$ $= 2k$ ならば rank$\varphi(M) = 2k$ または $2k-1$ となる。このことの証明は [4] 参照。また、GF(2) の場合は [1] にも書かれている。一方 φ は和を保たない。

この奇妙な対応にたどりついた理由は、二次形式全体のつくる Schur ring の dual を調べている時であった。

この対応は、ある置換群の正則部分群と密接な関係がある。今 $q = 2^m$ とし、GF(q) 上の n 次交代行列全体の集合を Alt(n,q)、n 次対称行列全体の集合を Sym(n,q) と書く。

$$\tilde{G} = \mathrm{Alt}(n,q).GL(n,q) \qquad \text{（半直積）}$$

とおくと、$\tilde{G}$ は $GL(n,q)$ を一点の固定部分群として Alt(n,q) 上の置換群であり、Alt(n,q) はそれ自身に正則に作用する $\tilde{G}$ の正規部分群である。一方、$\tilde{G}$ には正規でない正則部分群が存在する。それは、例えば

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right) \middle| \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{pmatrix} \in \mathrm{Alt}(n,q) \right\} \subset \tilde{G}$$

である。H は elementary abelian 2-subgroup である。H における積は

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{a} \\ 0 & I \end{array}\right)\right)\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & B \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & I \end{array}\right)\right) \\
&\quad = \left(\left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & I \end{array}\right)^T \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{b} \\ 0 & I \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & B \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ 0 & I \end{array}\right)\right) \\
&\quad = \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})^T & A+B+\mathbf{a}^T\mathbf{b}+\mathbf{b}^T\mathbf{a} \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ 0 & I \end{array}\right)\right)
\end{aligned}$$

となる一方

$$\begin{aligned}
&\varphi^{-1}\left(\varphi\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^T & A \end{array}\right) + \varphi\left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & B \end{array}\right)\right) \\
&\quad = \varphi^{-1}(A+\mathbf{a}^T\mathbf{a}+B+\mathbf{b}^T\mathbf{b}) \\
&\quad = \varphi^{-1}(A+B+\mathbf{a}^T\mathbf{b}+\mathbf{b}^T\mathbf{a}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})^T(\mathbf{a}+\mathbf{b})) \\
&\quad = \left(\begin{array}{cc} 0 & \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})^T & A+B+\mathbf{a}^T\mathbf{b}+\mathbf{b}^T\mathbf{a} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

となる。なぜこの現象に興味を持ったかというと、一般に置換群 $\tilde{G}$ が正則部分群 H を持つと、H 上の Schur ring ができる。さらに H が abelian のとき、その Schur ring の dual が定義できる。このようにして得られた Schur ring の dual はすべて同じ character table を持つが、一般には同型とは限らない。江川氏によって発見された二次形式の association scheme [3] は、二次形式の集合が abelian group の構造をもつことから Schur ring とみなすことができるが、実はこれが上の H によってつくられた Alt(n,q) 上の Schur ring の dual になっているのである。そこで、もし他にも正則な abelian subgroup があれば、それから定義される Schur ring の dual をとることによって新しい distance-regular graph が構成できるのではないか、と考えた。残念ながら、$\tilde{G}$ の中には、正規でない正則 elementary abelian subgroup は、共役を除いて上の H しかないことがわかった。このことは、Muzychuk により証明されたが、ここまでの経過を１９９４年1月に Oberwolfach での研究集会で話したところ、Arjeh Cohen から、関連した結果が Cooperstein と Timmesfeld によって得られているとの指摘を受けた。Timmesfeld の関連した論文は見つからなかったが、Cooperstein [2] は確かに関係していた。Cooperstein の結果を説明するために、$H \subset \tilde{G}$ を正則

な elementary abelian 2-subgroup とし、$V = \mathrm{Alt}(n,q)$ とおく。すると

$$A := VH/V \subset \tilde{G}/V = G$$

で $A \cong H/V \cap H$、A は $V \cap H$ を centralize する。したがって $V \cap H \subset C_V(A)$, $|H|/|A| \leq |C_V(A)|$, すなわち

$$|V| \leq |C_V(A)||A| \tag{1}$$

が成り立つ。一般に、G-module V で (1) をみたす部分群 $A \neq 1$ が存在するとき、V は "failure of factorization module" （略して (FF)-module）と呼ばれ、A は offending subgroup と呼ばれる。上で示したように、正則部分群があると offending subgroup ができるが、この逆は正しくない。さて、Cooperstein は、標数２型の Lie 型の群に対して、既約 (FF)-module を決定している。我々の目指すところとは少しちがうように思えるが、さらに Cooperstein は $\mathrm{Alt}(n,q)$ については offending subgroup も分類している。その結果によれば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

であるか、または $n = 4$ で

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & I & \\ * & & & \end{pmatrix}$$

である、と主張している。証明は２頁程度なのでチェックしてみようと読み始めると、これがフォローできない。いろいろ考えてみて、Muzychuk の議論とも比べてみると、実は $n = 4$ のとき

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ & 1 & 0 & b \\ & & 1 & a \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathrm{GF}(q) \right\} \tag{2}$$

という例もあることがわかった。ただし、この例は正則部分群には対応していないことがわかるので、実際に正則部分群を分類するには Cooperstein の分類結果の A に対応する H を分類すれば良いことになる。

なお、[2] は単純群の分類に使われたそうであるが、Cooperstein によれば、反例 (2) の出現はその後の議論には全く影響がないということである。実際、必要なのは A を完全に分類することではなく、どの A も $|A||C_V(A)| = |V|$ を満たしていることしか [2] のその後の議論では使われていないからである。

参考文献

[1] A. R. Calderbank, P. J. Cameron, W. M. Kantor, and J. J. Seidel, $\mathbf{Z}_4$-Kerdock codes, orthogonal spreads, and extremal line-sets, preprint.

[2] B. Cooperstein, An enemies list for factorization theorems, Comm. Alg. 6 (1978), 1239–1288.

[3] Y. Egawa, Association schemes of quadratic forms, J. Combinatorial Theory (A) 38 (1985), 1–14.

[4] A. Munemasa, The geometry of orthogonal groups over finite fields, preprint.