Distance-regular digraph に現れる直交多項式

大阪教育大学
宗政昭弘

classical な直交多項式 (Jacobi, Lagurre, Hermite) は漸化式

$$b_n u_{n+1}(x) + a_n u_n(x) + c_n u_{n-1}(x) = x u_n(x)$$

及び微分方程式

$$A(x) y'' + B(x) y' + C(x) y = \lambda_n y$$

(ただし n は多項式の次数) を満たす。Bochner は 1929年、上のような微分方程式の解となる多項式系を分類している。ここでは、微分を差分で置きかえた次の方程式を考える。

$$A_j \Delta^2 y_j + B_j \Delta y_j + C_j y_j = \lambda_n y_j$$

y を有限個の点、$\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ 上の関数と考えると

$$b_j^* y(\theta_{j+1}) + a_j^* y(\theta_j) + c_j^* y(\theta_{j-1}) = \theta_n^* y(\theta_j)$$

と書け、この解を $u_n(x)$ とし、$u_n(\theta_j) = u_j^*(\theta_n^*)$ とおくと

$$b_j^* u_{j+1}^*(\theta_n^*) + a_j^* u_j^*(\theta_n^*) + c_j^* u_{j-1}^*(\theta_n^*) = \theta_n^* u_j^*(\theta_n^*)$$

となる。これは $\{u_j^*(x)\}_{j=0}^d$ が $\deg u_j^* = j$ で三項漸化式を満たすことを示している。つまり、$\{\theta_i\}_{i=0}^d$、$\{\theta_i^*\}_{i=0}^d$ を相異なる実数、$u_i(\theta_j) = u_j^*(\theta_i^*)$ となるような、3項漸化式をみたす多項式系の組 $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$、$\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ を分類することが Bochner の結果の

discreteが場合への analogueであり、classicalな直交多項式の discrete analogue であると考えられる。Leonardは 1985年これを完成し、得られた多項式系は今日 Askey-Wilson 多項式と呼ばれている。

例えば、Legendre 多項式（Jacobi 多項式の特別な場合）が、球面上の球関数であるように、Askey-Wilson 多項式によって、いろいろな有限距離空間の球関数が記述される。これらの空間は P- and Q- polynomial association scheme と呼ばれていて それらの多くは古典群が distance-transitive（$d(\alpha,\beta)=d(\gamma,\delta) \Rightarrow {}^{\exists}g \in G$ s.t. $g(\alpha)=\gamma$, $g(\beta)=\delta$）に作用している。

一方、距離の公理から対称性を除くことによって nonsymmetric P- and Q- polynomial association scheme を定義することができて、その球関数を考えることにより $u_i(\theta_j)=\overline{u_j^*(\theta_i^*)}$ をみたす多項式系 $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$, $\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ が得られる。Leonardは、nonsymmetric のときは $u_i(x)=u_i^*(x)$, $\theta_i=\overline{\theta_i^*}$ $(i=0,1,\cdots,d)$ が成立することを示した。そこで $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ を

$$\theta_0 \in \mathbb{R}, \quad \overline{\theta_i}=\theta_{d+1-i} \quad (i=1,2,\cdots,d)$$

をみたす相異なる複素数とし、$\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ を

$$\begin{aligned}
&\deg u_i = i && (0\le i\le d)\\
&u_i(0)=0 && (1\le i\le d)\\
&u_i(\theta_0)=1 && (0\le i\le d)\\
&u_i(\theta_j)=u_j(\theta_i) && (0\le i,j\le d)
\end{aligned}$$

で（一意的に）定義される多項式とする。一般には $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ は複素係数の多項式だが $u_i(x)$ が実係数で、しかも最高次の係

数が正ならば $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ は $d+1$ 個の点 $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ 上に適当に正の重みをつけた内積について直交多項式になることがわかる。$\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ が実係数になるという条件は $\{\theta_i\}_{i=0}^d$ の方程式で表すことができるが、とても複雑である。$d \leq 3$ のときは nonsymmetric P-and Q-polynomial association scheme が存在し、$\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ はその球関数として実現される。$d=4$ のときは nonsymmetric P- and Q-polynomial association scheme は trivial なもの以外は存在しない。また $d \geq 4$ のとき、$\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ が実係数になるという条件がどれくらい強いものか、またそのとき $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ をうまく記述することができるかどうかは今後の課題である。