Distance-regular digraph に現れる直交多項式

大阪教育大学
宗政 昭弘

Askey-Wilson 多項式へのひとつのアプローチは、次の、Leonard の定理（坂内-伊藤[1], §3.5）である。

定理（Leonard）　d を 3 以上の整数，$u_i(x)$, $u_i^*(x)$ $(0 \le i \le d)$ を i 次の多項式，$a_i, b_i, c_i, a_i^*, b_i^*, c_i^*, \theta_i, \theta_i^*$ $(0 \le i \le d)$ を実数とし

$$b_i \neq 0, \quad b_i^* \neq 0 \qquad \text{for} \quad 0 \le i \le d-1$$

$$c_i \neq 0, \quad c_i^* \neq 0 \qquad \text{for} \quad 1 \le i \le d$$

$$b_d = b_d^* = c_0 = c_0^* = 0$$

$$\theta_i \neq \theta_j, \quad \theta_i^* \neq \theta_j^* \qquad \text{for} \quad i \neq j$$

をみたすとする。もし

$$u_i(\theta_0) = 1 \qquad (0 \le i \le d)$$

$$x u_i(x) = b_i u_{i+1}(x) + a_i u_i(x) + c_i u_{i-1}(x) \qquad (0 \le i \le d-1)$$

ただし $u_{-1}(x) = 0$

$$\theta_j u_d(\theta_j) = a_d u_d(\theta_j) + c_d u_{d-1}(\theta_j) \qquad (0 \le j \le d)$$

$$u_i^*(\theta_0^*) = 1 \qquad (0 \le i \le d)$$

$$x u_i^*(x) = b_i^* u_{i+1}^*(x) + a_i u_i^*(x) + c_i^* u_{i-1}^*(x) \qquad (0 \le i \le d-1)$$

ただし $u_{-1}^*(x) = 0$

$$\theta_j^* u_d^*(\theta_j^*) = a_d^* u_d^*(\theta_j^*) + c_d^* u_{d-1}^*(\theta_j^*) \qquad (0 \le j \le d)$$

$$u_i(\theta_j) = u_j^*(\theta_i^*) \qquad (0 \le i \le d,\ 0 \le j \le d)$$

が成り立てば、$u_i(x)$, $u_i^*(x)$ $(0 \le i \le d)$ は Askey-Wilson 多項式である。

$u_i(x)$, $u_i^*(x)$ の詳しい式は、坂内-伊藤 [1], §3.5 を見られたい。式 $x u_i^*(x) = b_i^* u_{i+1}^*(x) + a_i^* u_i^*(x) + c_i^* u_{i-1}^*(x)$ の両辺は、次数が d 以下の多項式であるから x として $d+1$ 個の相異なる点、$\{\theta_0^*, \theta_1^*, \cdots, \theta_d^*\}$ をとったときに成立することと同値である。$x = \theta_j^*$ とおいて $u_i^*(\theta_j^*) = u_j(\theta_i)$ を使うと

$$\theta_j^* u_j(\theta_i) = b_i^* u_j(\theta_{i+1}) + a_i^* u_j(\theta_i) + c_i^* u_j(\theta_{i-1})$$

これは $u_j(x)$ の 2階の差分方程式と見なすこともできる。つまり、Leonard の定理は、3項漸化式と2階の差分方程式をみたす多項式系は Askey-Wilson 多項式であると主張しているのである。このように、ある条件をみたす多項式系の分類を与える定理は古くからあり古典的な直交多項式のいろいろな特徴付けが知られている。(例えば Bochner [3], 詳しい歴史は Askey-Andrews [5])。

次に Askey-Wilson 多項式の組合せ論的意味について説明する。$\Gamma = (X, R)$ を連結無向グラフとする。ただし、X は点の集合、$R \subset X \times X$ は辺の集合で $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$, $(x, x) \notin R$ for $\forall x \in X$. とする。Γ の点 $x, y \in X$ に対して $d(x, y)$ を x から y への path の長さの最小値とする $d = \max\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ を Γ の直径、$n = |X|$ とおく。n 次正方行列 A_i $(i = 0, 1, \cdots, d)$ を次の

ように定義する。

$$(A_i)_{x,y} = \begin{cases} 1 & d(x,y)=i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$A_0, A_1, \cdots, A_d$ で $\mathbb{C}$ 上生成された $M_n(\mathbb{C})$ の線型部分空間 $\mathfrak{A}$ が行列の積について閉じているとき Γ は distance-regular graph であるという。このとき実際に

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^{k} A_k$$

と書くと

$$p_{ij}^{k} = \#\{z \in X \mid d(x,z)=i,\ d(z,y)=j\},$$

ただし $d(x,y)=k$. 逆に、$\#\{z \in X \mid d(x,z)=i,\ d(z,y)=j\}$ が $d(x,y)=k$ となる (x,y) によらず一定ならば、Γ は distance-regular graph になる。Γ が distance-regular である十分条件は、Γ が distance-transitive であること、すなわち、$x, y, u, v \in X$ に対し、$d(x,y) = d(u,v)$ ならば ある Γ の自己同型 σ が存在し $\sigma(x)=u$, $\sigma(y)=v$ となる。distance-regular graph は regular graph である。実際,

$$p_{ii}^{0} = \#\{z \in X \mid d(x,z)=i\}$$

であり、特に valency は p_{11}^{0} である。また $\mathfrak{A}$ はいつも可換代数である。実際, A_i は対称行列で, しかも A_iA_j が対称行列だから $A_iA_j = (A_iA_j)^T = A_j^T A_i^T = A_jA_i$ となる。従って $\mathfrak{A}$ は直交行列によって同時対角化可能である。$\mathfrak{A}$ は $M_n(\mathbb{C})$ の部分代数だから、n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に自然に作用する。上に示したように $\mathfrak{A}$ は可換だから $\mathfrak{A}$ の固有空間はすべて1次元で極大固有空間に分解すると、ちょうど $d+1$ 個ある:

$$\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$$

一次元空間 $\langle (1,1,\cdots,1)\rangle$ は必ず極大固有空間になる。これは本質的には正値行列に関する Perron-Frobenius の定理である。よって $V_0=\langle (1,1,\cdots,1)\rangle$ とおく。$E_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow V_j$ を直和分解 $\mathbb{C}^n = V_0\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_d$ に関する射影とすると、$\{E_0, E_1, \cdots, E_d\}$ は $\mathfrak{A}$ の primitive idempotent で $E_iE_j=\delta_{ij}E_i$ である。

一方、三角不等式から、$p_{1i}^{j}\neq 0$ なら $|i-j|\leq 1$ がわかる。従って

$$A_1A_i = p_{1i}^{i-1}A_{i-1} + p_{1i}^{i}A_i + p_{1i}^{i+1}A_{i+1}$$

が成り立つ。よって A_i は A_1 の i 次多項式である。また、このことから、$\mathfrak{A}$ は A_1 によって（$\mathbb{C}$-代数として）生成されることがわかり、A_1 の最小多項式の次数は $\dim\mathfrak{A}=d+1$ である。よって $v_i(A_1)=A_i$ となる i 次多項式 v_i $(0\leq i\leq d)$ が一意的に存在する。$k_i=p_{ii}^{0}$, $m_i=\dim V_i=\mathrm{rank}\,E_i$ $(0\leq i\leq d)$ とおく。また、$u_i(x)=v_i(x)/k_i$ とおく。$A_1=\sum_{i=0}^{d}\theta_iE_i$ とおく。すなわち、θ_i は A_1 の V_i 上の固有値である。$\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_d$ は相異なり、V_0 のとり方から $\theta_0=k_1$ である。さらに、A_j の V_i 上の固有値は $v_j(\theta_i)$ である。

定義 $u_i(\theta_j)=u_j^*(\theta_i^*)$ $(0\leq i\leq d,\ 0\leq j\leq d)$ となる $d+1$ 個の実数 $\theta_0^*,\theta_1^*,\cdots,\theta_d^*$ と j 次多項式 $u_j^*(x)$ が存在するとき、distance-regular graph Γ は Q-polynomial であるという。Q-polynomial な distance-regular graph を P- and Q-polynomial association scheme と呼ぶこともある。

Q-polynomial という概念は、一見 Leonard の定理を満たすように作り出された人工的なもののように見えるが、実は 1973年、Delsarte によって導入されたものである。つまり、Leonard の定理や、Askey-Wilson 多項式よりもずっと前に考えられていたのである。Delsarte はコード理論とデザイン理論の双対性を論じるために、P-polynomial, Q-polynomial association scheme を定義した。上で与えた定義は、distance-regular graph に対してのものなので、一般的な定義については、坂内-伊藤 [1] を参照していただきたい。

さて P- and Q-polynomial association scheme があると、多項式系の組 $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$, $\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ が得られるが、これらが両方とも直交多項式であることを示そう。まず、$\operatorname{tr} A_i = 0$ $(i \neq 0)$ より

$$\operatorname{tr} A_i A_j = \delta_{ij} k_i n$$

が成り立つことがわかる。これから、

$$\sum_{\ell=0}^{d} v_i(\theta_\ell) v_j(\theta_\ell) m_\ell = \delta_{ij} k_i n$$

$$\sum_{\ell=0}^{d} u_i(\theta_\ell) u_j(\theta_\ell) m_\ell = \delta_{ij} n / k_i$$

となり $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$ が直交多項式であることがわかった。(ここまでは、Q-polynomial でなくても、任意の distance-regular graph について成立する。) $U = (u_i(\theta_j))$, $M = \operatorname{diag}(m_0, m_1, \cdots, m_d)$, $K = \operatorname{diag}(k_0, k_1, \cdots, k_d)$ とおくと、上の式は

$$U M U^T = n K^{-1}$$

と書ける。従って

$$U^T K U = n M^{-1}$$

これを成分で書くと

$$\sum_{\ell=0}^{d} u_\ell(\theta_i) u_\ell(\theta_j) k_\ell = \delta_{ij} n/m_i$$

すなわち

$$\sum_{\ell=0}^{d} u_i^*(\theta_\ell^*) u_j^*(\theta_\ell^*) k_\ell = \delta_{ij} n/m_i$$

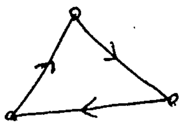
となり $\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ の直交性も示せた。このことから，$\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ が3項漸化式を満たすことは，直交多項式の基本的性質として導かれる。このようにして，P-and Q-polynomial association scheme から得られた多項式系の組 $\{u_i(x)\}_{i=0}^d$，$\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ は，Leonard の定理の仮定を満たし，従って Askey-Wilson 多項式になる。また，distance-transitive な Q-polynomial association scheme の場合は，$\{u_i^*(x)\}_{i=0}^d$ が自己同型群の等質空間としての球関数になっている。P-and Q-polynomial association scheme の例は，坂内-伊藤 [ ] を参照されたい。$u_i(x)=u_i^*(x)$ $(0\leq i\leq d)$ となるとき，self-dual というが，self-dual な例も，self-dual でない例も豊富に存在する。

さて，次に nonsymmetric な P-and Q-polynomial association scheme を考える。上で定義された P-and Q-polynomial association scheme は $A_1, A_2, \cdots, A_d$ がすべて対称行列であることから，symmetric であるという。非対称なものを考えるということは，向きのある distance-regular graph を考えるということである。向きのある graph のことを digraph (directed graph の略) という。digraph における距離は2点を結ぶ向きのある path の長さの最小値である。従って $d(x,y)$ と $d(y,x)$ は一般には異なる。しかし三角不等式は成立する。

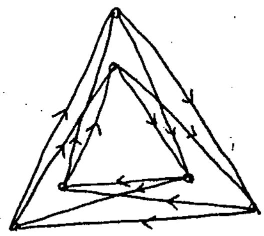
A_i $(i=0,1,\cdots,d)$ は、向きのない場合と同様に定義し、distance-regular digraph を定義することができる。すると、

$$A_1 A_i = \sum_{j=0}^{i+1} p_{1i}^{j} A_j \quad , \qquad p_{1i}^{i+1} \neq 0$$

となって、3項漸化式ではないが、やはり A_i は A_1 の i 次多項式である。この他、向きのない場合の議論はそのまま成立し、Q-polynomial の定義をすることができる。初めて distance-regular digraph を定義したのは Damerell [10] である。向きのついた closed path の長さの最小値を girth というが、Damerell は girth g と diameter d の間に $g=d$ または $g=d+1$ という関係が成りたつことを示した。$g=d$ のものを long type, $g=d+1$ のものを short type を呼び、すべての long type の distance-regular digraph は short type からつくられることがわかっている。例えば、cycle は short type であって、その coclique extension が long type になる。



$d=2,\ g=3$



$d=3,\ g=3$

これを adjacency matrix で記述すると次のようになる。A_1 を short type の distance-regular digraph の adjacency matrix とする。J を任意の大きさの(正方) all 1 matrix とすると、$A_1 \otimes J$ は、long type の distance-regular digraph の adjacency matrix になる。逆に任意の long type の distance-regular digraph の adjacency matrix は

short type の adjacency matrix と J との Kronecker 積に分解できる。このように、有向グラフの場合は無向グラフの場合と著しく状況が異なっている。また、long type は、Q-polynomial にはなり得ない。(宗政 [19])。以後 short type の distance-regular digraph のみを考えることにする。

定理 (Leonard) nonsymmetric な P- and Q-polynomial association scheme は self-dual である。

この定理は、symmetric の場合と nonsymmetric の場合が決定的に違うことを示唆している。この違いは $u_i(x)$ に定数項がない、すなわち $u_i(0)=0$ $(i\neq 0)$、であることから来る。symmetric の場合には、例えば $u_2(0)\neq 0$ である。また $u_i^*(0)=0$ $(i\neq 0)$ であることも Leonard [15] によって示されている。この定理の本質は、全く self-contained な、次の命題に集約することができる。

命題. $u_i(x)$, $u_i^*(x)$ を i 次の多項式 $(0\leq i\leq d)$, $\theta_0,\cdots\theta_d$, $\theta_0^*,\theta_1^*,\cdots,\theta_d^*\in\mathbb{C}$, $\theta_i\neq 0$, $\theta_i\neq\theta_j$, $\theta_i^*\neq 0$, $\theta_i^*\neq\theta_j^*$, $(0\leq i\leq d,\ 0\leq j\leq d)$

$$u_i(0)=\delta_{i0} \qquad u_i^*(0)=\delta_{i0}$$
$$u_i(\theta_0)=1 \qquad u_i^*(\theta_0^*)=1$$
$$u_i(\theta_j)=u_j^*(\theta_i^*) \qquad (0\leq i\leq d,\ 0\leq j\leq d)$$

とする。このとき ある 0 でない複素数 c があって

$$\theta_i^*=\theta_i c$$
$$u_i(x)=u_i^*(cx)$$

が成り立つ．特に，

$$u_i(\theta_j)=u_j(\theta_i)\ ,\quad u_i^*(\theta_j^*)=u_j^*(\theta_i^*)\qquad (0\le i,j\le d)$$

である。

証明は Leonard [16] を参照されたい。nonsymmetric P- and Q-polynomial association scheme のときは，命題の結論に現れる定数 c が 1 でなくてはならないことが容易に言えるので、self-dual が示される．従って、nonsymmetric P- and Q-polynomial association scheme があると，$\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_d$ という $d+1$ 個の複素数（相異なり、0でない）と i 次の多項式 $u_i(x)$ があって

(1) $\deg u_i(x)=i$ $\qquad (0\le i\le d)$

(2) $u_i(0)=\delta_{i0}$ $\qquad (0\le i\le d)$

(3) $u_i(\theta_0)=1$ $\qquad (0\le i\le d)$

(4) $u_i(\theta_j)=u_j(\theta_i)$ $\qquad (0\le i,j\le d)$

を満たす。

一般に，$d+1$ 個の相異なる、0でない複素数 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_d$ に対し、(1)(2)(3)(4) を満たす多項式系 $\{u_i(x)\}_{i=0}^{d}$ は一意的に存在する。今のところこのような多項式系の呼び名はないようであるから，Leonard 多項式と呼ぶことにしよう。実際，$u_0(x)=1$, $u_1(x)=x/\theta_0$ であり，$u_2(x)$ は 3条件 $u_2(0)=0$, $u_2(\theta_0)=1$, $u_2(\theta_1)=u_1(\theta_2)$ を満たす 2次の多項式だから一意的に存在する。同様に，u_0, u_1, u_2 が決まれば u_3 は 4 条件を満たす 3次の多項式として一意的に存在し、次々続けていくことができる。詳しく

は 宗政 [19] を参照. nonsymmetric P- and Q-polynomial association scheme からできる Leonard 多項式は有理係数であり、$\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ はある2次体の代数的整数である。さらに

$$(5) \quad \theta_1(\theta_1-\theta_2)\cdots(\theta_1-\theta_d)+(\theta_0-\theta_2)\cdots(\theta_0-\theta_d)=0$$

が成り立つ。また、$\{u_i(x)\}_{i=0}^{d}$ は 内積

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\ell=0}^{d} f(\theta_\ell)\overline{g(\theta_\ell)}\, m_\ell$$

について直交する、ただし

$$(6) \quad m_\ell = \frac{\prod_{1\le i\le d}(\theta_0-\theta_i)}{\prod_{\substack{0\le i\le d\\ i\ne \ell}}(\theta_\ell-\theta_i)}\,\frac{\theta_0}{\theta_\ell}$$

$m_\ell = \dim V_\ell = \mathrm{rank}\, E_\ell$ だから、正の整数である。さらに、$\overline{\theta_i}=\theta_{d+1-i}$ $(1\le i\le d)$ であり、$m_i = m_{d+1-i}$ である。実際、Damerell によれば $A_i^T = A_{d+1-i}$ であり、従って $\overline{u_i(\theta_j)} = u_{d+1-i}(\theta_j)$、従って特に $u_1(\overline{\theta_i}) = u_1(\theta_{d+1-i})$, $\overline{\theta_i}=\theta_{d+1-i}$ である。これで、内積 $\langle\, ,\, \rangle$ が Hermite 内積であることがわかった。従ってこの内積に関する直交多項式は、実係数となるが、逆に、(1)—(4) で定義された多項式が実係数ならば直交多項式になるというのは、注目に値する。すなわち、

定理 (宗政 [18, 19]) $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ を相異なる0でない複素数, $\theta_0=\overline{\theta_0}$, $\overline{\theta_i}=\theta_{d+1-i}$, $(1\le i\le d)$ $\{u_i(x)\}_{i=0}^{d}$ を (1)—(4) で定義される Leonard 多項式, m_i $(0\le i\le d)$ を (6) で定義される数とする。$m_i>0$ $(0\le i\le d)$ のとき、$\{u_i(x)\}_{i=0}^{d}$ が直交多項式になる、すなわち

$$\sum_{\ell=0}^{d} u_i(\theta_\ell)\overline{u_j(\theta_\ell)}\, m_\ell = 0 \qquad \text{for} \quad i \neq j$$

となる必要十分条件は，$u_i(x)$ $(0 \le i \le d)$ が実係数になることである。

証明には，C-algebra の概念を使う。C-algebra については，坂内–伊藤 [1]，§2.5 を参照。C-algebra の指標の直交関係がそのまま $u_i(x)$ の直交関係になる。$m_i > 0$ $(0 \le i \le d)$ という条件は上の定理の仮定に入っているが，もし $u_i(x)$ の最高次の係数が正ならば，$m_i > 0$ であることが証明できる。

$u_i(x)$ $(0 \le i \le d)$ が実係数になるという条件は $\mathrm{Re}\,\theta_i$, $\mathrm{Im}\,\theta_i$ $(0 \le i \le d)$ に関する斉次方程式で書くことができる。従って，もし，ある $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ について Leonard 多項式 $\{u_i(x)\}_{i=0}^{d}$ が実係数ならば，$\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ に対して，$\alpha\theta_0, \alpha\theta_1, \cdots, \alpha\theta_d$ についての Leonard 多項式も実係数になる。今後，α は (5) が成り立つようにとっておくものとする。すなわち，(5) は，d 次の斉次式と $d-1$ 次の斉次式の和だから，$\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ に対して，それらを $\alpha\theta_0, \alpha\theta_1, \cdots, \alpha\theta_d$ でおきかえることによって (5) が成立するような α は一意的に存在する。以下，このように正規化した $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_d$ を考える。

例．$d=2$．

$$\theta_0 = 2a+1, \quad \theta_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{4a+3}\, i}{2}, \quad \theta_2 = \frac{-1 \mp \sqrt{4a+3}\, i}{2}$$

という形に限る．$4a+3$ が素数べき q のときには，distance-regular digraph が次のようにして作られる：$\Gamma = (X, R)$，$X = GF(q)$，

$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in X, x - y$ は 0でない平方 $\}$

$d=3$.

$$\theta_0 = a(2a^2-1) \qquad \theta_2 = -a$$
$$\theta_1 = a^2 - a \pm ai, \quad \theta_3 = a^2 - a \mp ai$$

という形に限る。このとき

$$u_0(x)=1, \quad u_1(x) = x/a(2a^2-1),$$
$$u_2(x) = \frac{x^2 + 2ax - 2a^2x}{a^2(2a^2-1)(2a^2-2a+1)}$$
$$u_3(x) = \frac{x^3 - a(2a^2-1)x^2 + a^2(2a^3-4a^2+a+1)}{a^4(2a^2-1)(2a^2-2a+1)}$$

となる。Liebler-Mena は、a が 2べきのとき、distance-regular digraph を実際に構成した。

$d=4$

$d=2,3$ のときのように ひとつのパラメータを使って $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3\ \theta_4$ が書けるかは不明である。宗政 [19] は $2\mathrm{Re}\,\theta_1$, $2\mathrm{Re}\,\theta_2$ の満たす Diophantine 方程式を求めている。さらに $2\mathrm{Re}\,\theta_1$, $2\mathrm{Re}\,\theta_2$ を用いて p_{ij}^k を書くこともできるが、distance-regular digraph があると、p_{ij}^k が整数でなくてはならないことから、nontrivial な P and Q-polynomial association scheme の非存在がいえる。Trivial なものとは 5-cycle である。

General

1. E.Bannai and T.Ito, "Algebraic Combinatorics I," Benjamin/Cummings, Menlo Park, California, 1984.
2. A.E.Brouwer, A.M.Cohen, and A.Neumaier, "Distance-Regular Graphs," Springer-Verlag, Berlin, 1989.
3. S.Bochner, "Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme", Math. Z. 29 (1929), 730-736.
4. A. O. Gelfond, "Dfferenzenrechnung", Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958.
5. G. Szegö, "Orthogonal Polynomials", 4th ed., American Mathematical Society, 1975.

Askey-Wilson polynomials

6. G. Andrews and R. Askey, "Classical orthogonal polynomials", Lecture Notes in Mathematics 1171, 36-62.
7. R. Askey and J. Wilson, "Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials", Memoirs Amer. Math. Soc. 54 (1985), No. 319.
8. R. Askey and J. Wilson, "A set of orthogonal polynomials that generalize the Racah coefficients or 6-j symbols", SIAM J. Math. Anal. 10 (1979), 1008-1016.
9. D. Leonard, "Orthogonal polynomials, duality, and association schemes", SIAM J. Math. Anal. 13, 656-663.
10. D. Leonard, "Parameters of association schemes that are both P- and Q-polynomial", J. Combinatorial Theory, Ser. A, 36 (1984), 355-363.

Nonsymmetric P- and Q- polynomial association schemes

11. E. Bannai, P.J. Cameron, and J. Kahn, "Nonexistence of certain distance-transitive digraphs", J. Combinatorial Theory, Ser. B, 31 (1981), 105-110.
12. R. M. Damerell, "Distance-transitive and distance-regular digraphs", J. Combinatorial Theory Ser.B, 31 (1981), 46-53.
13. C. W. Lam, "Distance-transitive digraphs", Discrete Math. 29 (1980), 265-274.

14. H.Enomoto and R. Mena, " Distance-regular digraphs of girth 4", J. Combinatorial Theory Ser.B, 43 (1987), 293-302.

15. D. Leonard, "Nonsymmetric, metric, cometric association schemes", J. Combinatorial Theory Ser.B, to appear.

16. D. Leonard, "Nonsymmetric, metric, cometric association schemes are self-dual", preprint.

17. R. A. Liebler and R. A. Mena, "Certain distance-regular digraphs and related rings of characteristic 4", J. Combinatorial Theory Ser.A, 47 (1988), 111-123.

18. A. Munemasa, "Nonsymmetric P- and Q- polynomial association schemes and associated orthogonal polynomials", Ph.D. dissertation, The Ohio State University, 1989.

19. A. Munemasa, "On nonsymmetric P- and Q- polynomial association schemes", to appear in J. Combinatorial Theory Ser.B.