ムーンシャイン頂点作用素代数と二元符号

宗政昭弘
東北大学大学院情報科学研究科

2010 年 10 月 2 日

Triply Even Codes

ここでいう **code** とは、二元体 $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ の線形部分空間のことである。二元体なので **binary code** ということもある。n を、その **code** の **長さ** という。
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_2^n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}(\boldsymbol{x}) &= \{i \mid 1 \le i \le n,\ x_i = 1\} \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) &= |\,\mathrm{supp}(\boldsymbol{x})| \end{aligned}$$

Def. Code D が **triply even** とは

$$\forall \boldsymbol{x} \in D,\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$$

(Code D が **doubly even** とは
$\forall \boldsymbol{x} \in D,\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 4$**)**
(Code D が **even** とは
$\forall \boldsymbol{x} \in D,\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 2$**)**

Ex.

$$\begin{aligned} D = \mathrm{span}\{&(1111111100000000), \\ &(0000111111110000), \\ &(1100110011001100)\} \end{aligned}$$

概要 (Triply Even Code に関連して最近わかったこと)

ムーンシャイン頂点作用素代数における **Virasoro frame** の不変量として長さ **48** の **triply even code** が現れることがわかっている。

- **triply even code** は **divisible code** の特殊な場合として先行研究が少なからずあった（しかし欲しい情報は？）
- 長さ **48** の **triply even code** の分類は工夫した結果、完成した
- 長さ **48** の **triply even code** の分類結果に予想外のもの（T_{10} と書く）が登場したこと
- T_n を研究していたグループは **triply even** の重要性は認識せず、**divisible code** を研究していたグループは T_{10} を重要な例と認識していなかったようだ
- T_{10} とその **subcode** から、最近 **C.H. Lam** によって構成された新しい **VOA** は **Schellekens (1993)** によって存在が予言されていたいくつかの **CFT** に対応するものであった

D: **triply even** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \boldsymbol{x} \in D,\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$

- H. Ward (1981): Divisible codes
- H. Ward (2001): Divisible codes, a survey
- X. Liu (2010): Binary divisible codes of maximum dimension

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}_2^n$ に対して、$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n)$ と定義

Lemma. $D = \mathrm{span}(S) \subset \mathbb{F}_2^n$ とすると、D が **triply even** $\iff$

$$\begin{aligned} \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) &\equiv 0 \pmod 8 \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) &\equiv 0 \pmod 4 \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} * \boldsymbol{z}) &\equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

$(\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in S)$

Triply Even Code の例

Dong–Griess–Höhn (1998) はムーンシャイン頂点作用素代数を調べて次の **triply even code** を得た。**Miyamoto (2004)** は逆にこの **code** を用いてムーンシャイン頂点作用素代数 $V^\natural$ の簡明な構成法を与えた。

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1}_n = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{F}_2^n$$

$$D = \mathrm{span} \begin{bmatrix} H & H & H & H & H & H \\ \mathbf{1}_8 & 0 & 0 & \mathbf{1}_8 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_8 & 0 & 0 & \mathbf{1}_8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_8 & 0 & 0 & \mathbf{1}_8 \\ \mathbf{1}_8 & \mathbf{1}_8 & \mathbf{1}_8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \subset \mathbb{F}_2^{48}$$

$\dim D = 7.$

$L(\frac{1}{2},0)$ と Code VOA

- $L(\frac{1}{2},0)$ は **VOA** になる。そのすべての表現は完全可約で、既約加群は $L({}^1\!/\!{}_2,0),\quad L({}^1\!/\!{}_2,{}^1\!/\!{}_2),\quad L({}^1\!/\!{}_2,{}^1\!/\!{}_{16})$ の３つしかない。

- $L({}^1\!/\!{}_2,0)^{\otimes n}$ も **VOA** になる。

$$L({}^1\!/\!{}_2,h_1)\otimes\cdots\otimes L({}^1\!/\!{}_2,h_n)\quad (h_1,\ldots,h_n\in\{0,{}^1\!/\!{}_2\})$$

は既約 $L(\frac{1}{2},0)^{\otimes n}$ 加群になる。これらをうまくまとめるとそれ自身 **VOA** になる

- 実際、C を **even code** とすると

$$\bigoplus_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in C} L({}^1\!/\!{}_2,\frac{\alpha_1}{2})\otimes\cdots\otimes L({}^1\!/\!{}_2,\frac{\alpha_n}{2})$$

は **VOA** になる（**Miyamoto's code VOA**）。

Lattice と Lattice VOA

Lattice L とは、$\mathbb{R}^n \supset L \cong \mathbb{Z}^n$, 離散部分群（または、$L$ は $\mathbb{R}^n$ の基底を含む）

- **Lattice** L が **even** とは $\forall \boldsymbol{x} \in L$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \in 2\mathbb{Z}$.

一般に、**even lattice** L から **VOA** V_L を作る方法が知られている。V_L は L から作られた **lattice VOA** と呼ぶ

- $L' \subset L \implies V_{L'} \subset V_L$
- $V_{L \oplus L'} \cong V_L \otimes V_{L'}$

Ex. $\mathbb{R}^1 \supset 2\mathbb{Z}$,

$$V_{2\mathbb{Z}} = (L(1/2, 0) \otimes L(1/2, 0)) \oplus (L(1/2, 1/2) \otimes L(1/2, 1/2))$$

J. McKay による Leech lattice の構成

Def. **Hadamard matrix of order** n とは成分が ± 1 の正方行列 H で $HH^T = nI$ をみたすもの

$n = 12$ のとき、$H + H^T = -2I$ をみたす **Hadamard matrix** H が存在し、他のすべての **Hadamard matrix** はこの H に「同値」である。

$$\Lambda = \frac{1}{2}\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} I & H-I \\ 0 & 4I \end{bmatrix} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{24} \subset \mathbb{R}^{24}$$

を **Leech lattice** と呼ぶ（**McKay, 1972**）

$$\begin{aligned} \Lambda &\supset \frac{1}{2}\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} 4I & 4(H-I) \\ 0 & 4I \end{bmatrix} = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} 2I & 2(H-I) \\ 0 & 2I \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{span}_{\mathbb{Z}} 2I = 2\mathbb{Z}^{24}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_\Lambda &\supset (V_{2\mathbb{Z}})^{\otimes 24} = ((L(1/2,0) \otimes L(1/2,0)) \oplus (L(1/2,1/2) \otimes L(1/2,1/2)))^{\otimes 24} \\ &\supset L(1/2,0)^{\otimes 48} \end{aligned}$$

ムーンシャイン頂点作用素代数

Leech lattice Λ に対して **lattice VOA** V_Λ を作り、それに $\mathbb{Z}_2$-**orbifold** とよばれる操作を施すことで得られる $\tilde{V}_\Lambda$ を $V^\natural$ と書き、ムーンシャイン頂点作用素代数 とよぶ。

$\mathbb{Z}_2$-**orbifold** とは、V_Λ を **subalgebra** とその加群の直和に分解し、**subalgebra** はそのまま残して、残りの半分は **twist** したもので置き換える、という操作である。

$L(1/2, 0)^{\otimes 48}$ は残す方の **subalgebra** に入っているので

$$L(1/2, 0)^{\otimes 48} \subset V_\Lambda \cap \tilde{V}_\Lambda \subset \tilde{V}_\Lambda = V^\natural$$

つまり、V_Λ だけでなく $V^\natural$ も **framed VOA**

Framed VOA

Framed VOA とは、**simple VOA** であって **Virasoro** 元を共有する **subalgebra** $F \cong L(1/2, 0)^{\otimes n}$ をもつもの（$V^\natural$ に対しては $n = 48$）。このとき F を V の **Virasoro frame** という

- V は F-**module** として直和分解

$$V \cong \bigoplus_{h_1,\dots,h_n \in \{0,1/2,1/16\}} m_{h_1,\dots,h_n} L(1/2, h_1) \otimes \cdots \otimes L(1/2, h_n)$$

$m_{h_1,\dots,h_n}$ は非負整数

- **fusion rule, weight** の整数性から $m_{h_1,\dots,h_n} \neq 0$ となる $(h_1, \dots, h_n)$ に制限が加わる。特に

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \in \mathbb{Z} \implies |\{i \mid h_i = 1/16\}| \equiv 0 \pmod 8$$

Structure Code of a Framed VOA

V の F 加群としての直和分解を等質成分でまとめて

$$V = \bigoplus_{h_1,\ldots,h_n\in\{0,1/2,1/16\}} V(h_1,\ldots,h_n),$$

$$V(h_1,\ldots,h_n) \cong m_{h_1,\ldots,h_n} L(1/2, h_1) \otimes \cdots \otimes L(1/2, h_n)$$

$$V^\alpha = \bigoplus_{\substack{(h_1,\ldots,h_n)\in\{0,1/2,1/16\}^n \\ \{i|h_i=1/16\}=\mathrm{supp}(\alpha)}} V(h_1,\ldots,h_n) \quad (\alpha \in \mathbb{F}_2^n)$$

$$D = \{\alpha \in \mathbb{F}_2^n \mid V^\alpha \neq 0\}$$

とおく。この D を **Virasoro frame** F の **structure code** という。

実際は V が **holomorphic** と仮定した場合の話だが、ここでは $V = V^\natural$ の場合にしか考えないのでこれでよい。$V = V^\natural$ **(** $\Longrightarrow$ V**: holomorphic)** $\Longrightarrow$ $C = D^\perp$**,** D は **triply even.**

注意: Structure Code は Virasoro Frame に依存

Leech Lattice VOA やその $\mathbb{Z}_2$-**orbifold** である $\tilde{V}_\Lambda = V^\natural$ に **Virasoro frame** $L(1/2, 0)^{\otimes n}$ があるのは、簡単に書くと

$$2\mathbb{Z}^{24} \subset \Lambda \implies L(1/2, 0)^{\otimes 48} \subset V_\Lambda \cap \tilde{V}_\Lambda$$

となるが、これは注意が必要である。この式における $\subset$ の左辺は同型 $\cong$ を省略しているからである。正しくは

$$2\mathbb{Z}^{24} {\cong} \mathcal{F} \subset \Lambda \implies L(1/2, 0)^{\otimes 48} {\cong} F(\mathcal{F}) \subset V_\Lambda \cap \tilde{V}_\Lambda$$

と書くべき。

一般には Λ の中に $2\mathbb{Z}^{24} \cong \mathcal{F}$ を満たす **sublattice** $\mathcal{F}$ はたくさんある。しかし $\mathrm{Aut}(\Lambda) \to \mathrm{Aut}(V_\Lambda)$ が作れるので、$\mathrm{Aut}(\Lambda)$ の作用で同値な $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \cong 2\mathbb{Z}^{24}$ から得られる **Virasoro frame** $F(\mathcal{F}), F(\mathcal{F}')$ は $\mathrm{Aut}(V_\Lambda), \mathrm{Aut}(\tilde{V}_\Lambda)$ で共役になる。

Leech Lattice の Frame から Virasoro Frame

Lattice L の **sublattice** $\mathcal{F}$ で $\mathcal{F} \cong 2\mathbb{Z}^m$ **(**$m = \operatorname{rank} L$**)** をみたすものを L の **frame** という。
特に $L = \Lambda$**: Leech lattice** に対して、

$$\{\textbf{frames of } \Lambda\}/\mathrm{Aut}(\Lambda) \to \{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\}/\mathrm{Aut}(V^\natural)$$

という写像ができる。一方、**structure code** とは

$$\{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\}/\operatorname{Aut}(V^\natural) \to \{\textbf{triply even codes of length } 48\}$$

これら２つの写像を合成すると、

$$\{\textbf{frames of } \Lambda\}/\operatorname{Aut}(\Lambda) \to \{\textbf{triply even codes of length } 48\}$$

もはや **VOA** とは無関係になり、簡単な記述ができるはず

Lattice の Frame から $\mathbb{Z}_4$-code, ただし $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

L を **(even) lattice** とするとき、その **frame** は $\mathrm{Aut}(L)$ の作用を除いても一般にはたくさんある。**frame** の同値類を記述するのが $\mathbb{Z}_4$-**code** である。

長さ m の $\mathbb{Z}_4$-**code** とは $\mathbb{Z}_4^m$ の部分加群のことをいう。２つの長さ n の $\mathbb{Z}_4$-**code** が同値とは、ある **monomial matrix (**各行各列に ± 1 が１カ所だけあって他は 0）の作用で移るときをいう。

$L \supset \mathcal{F} \cong \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} f_i \cong 2\mathbb{Z}^m$ とすると、$\mathcal{F}$ に対して長さ m の $\mathbb{Z}_4$-**code**

$$L/\mathcal{F} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_4^m \mid \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m x_i f_i \in L\} \qquad (\mathcal{F} \subset L \subset \frac{1}{4}\mathcal{F})$$

を対応させると、この対応により

$$\{\text{frames of } L\}/\,\mathrm{Aut}(L) \to \{\text{ 長さ } m \text{ の } \mathbb{Z}_4\text{-codes}\}/\cong \quad \text{は単射}$$

Leech lattice の特徴付けと type II codes

Thm. Leech lattice はルートをもたない唯一の **rank 24** の **even unimodular lattice** である。

このことを使うと

$$\{\textbf{frames of } \Lambda\}/\operatorname{Aut}(\Lambda) \to \{\text{ 長さ } 24 \text{ の } \mathbb{Z}_4\textbf{-codes}\}/\cong$$

の像が決定できる。

$\mathcal{C} \subset \mathbb{Z}_4^m$ が **type II code** とは、標準的内積に関して $\mathcal{C} = \mathcal{C}^\perp$ でかつ

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{C},\ \operatorname{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$$

ただし $\operatorname{wt}(x)$ は $x = 0, 1, 2, 3$ に応じて $0, 1, 4, 1$ とし $\operatorname{wt}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^m \operatorname{wt}(x_i)$ と定義する（**Euclidean weight**）。このとき

$$\{\textbf{frames of } \Lambda\}/\operatorname{Aut}(\Lambda) \leftrightarrow \{\text{ 長さ } 24 \text{ の } \textbf{type II } \mathbb{Z}_4\textbf{-code } \mathcal{C} \text{ で } \min\{\operatorname{wt}(\boldsymbol{x}) \mid 0 \neq \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\} = 16\}/\cong$$

$\mathbb{Z}_4$-Code の Binary Residue Code と Structure Code

$\mathcal{C}$ を長さ m の $\mathbb{Z}_4$-**code** とするとき、
$\mathcal{C} \bmod 2 = \{\boldsymbol{x} \bmod 2 \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{C}\} \subset \mathbb{F}_2^m$ を $\mathcal{C}$ の **binary residue code** といい、$\mathrm{Res}(\mathcal{C})$ と書く。
L を **even unimodular lattice of rank** m, $L \supset \mathcal{F}$ を **frame** とし、
$\mathcal{C} = \Lambda/\mathcal{F}$ とおくと

- $F(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ に対応する V_L の **Virasoro frame** とすると $F(\mathcal{F})$ の **structure code** は

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Res}(\mathcal{C}) & \mathrm{Res}(\mathcal{C}) \end{bmatrix}$$

- $\tilde{F}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ に対応する $\tilde{V}_L$ の **Virasoro frame** とすると $\tilde{F}(\mathcal{F})$ の **structure code** は

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Res}(\mathcal{C}) & \mathrm{Res}(\mathcal{C}) \\ \mathbf{1}_{24} & 0 \end{bmatrix}$$

Binary Doubly Even Code C の Extended Doubling $\mathcal{D}(C)$

- $\tilde{F}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ に対応する $\tilde{V}_\Lambda$ の **Virasoro frame** とすると $\tilde{F}(\mathcal{F})$ の **structure code** は

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Res}(\mathcal{C}) & \mathrm{Res}(\mathcal{C}) \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{ただし } \mathcal{C} = \Lambda/\mathcal{F})$$

この **code** の作り方を **extended doubling** という。すなわち

Def. $C = \mathrm{span}(A)$ を長さ m の **binary code** とするとき、C の **extended doubling** を次で定義する。

$$\mathcal{D}(C) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}_2} \begin{bmatrix} A & A \\ \mathbf{1}_m & 0 \end{bmatrix}$$

C が **doubly even** で $8|m$ なら $\mathcal{D}(C)$ は長さ $2m$ の **triply even code** になる。思い出してみれば、もともとの **Dong–Griess–Höhn, Miyamoto** が $V^\natural$ の構成に用いた **code** も **extended doubling** である。

$V^\natural$ の Virasoro Frame の分類へ向けて

以後 Λ は **Leech lattice**, $V = V^\natural = \tilde{V}_\Lambda$ とする。

$$\{\textbf{frames of } \Lambda\}/\operatorname{Aut}(\Lambda) \to \{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\}/\operatorname{Aut}(V^\natural)$$

$$\{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\}/\operatorname{Aut}(V^\natural) \xrightarrow{\textbf{str}} \{\textbf{triply even codes of length } 48\}$$

という２つの写像ができていた。

Virasoro frame の **structure code** を利用すると **Miyamoto involution** という $\operatorname{Aut}(V^\natural) = \mathbb{M}$ の元を作ることができる。いろいろな **Virasoro frame** からは、いろいろな $\mathbb{M}$ の元を作ることができて $\mathbb{M}$ の群構造（特にその部分群）が明らかになることが期待できる。

上の２つの写像を使って $V^\natural$ の **Virasoro frame** を分類したい。

特に、**Virasoro frame** の不変量を与える **str** の像を決定したい。

Frames of Λ → Virasoro Frames of $V^\natural$

$$
\begin{tikzcd}
\{\text{Virasoro frames of } V^\natural\} \arrow[r, "\text{str}"] & \left\{ \begin{array}{l} \text{triply even } D \\ \text{長さ} = 48,\ \mathbf{1}_{48} \in D \end{array} \right\} \\
\{\text{frames of } \Lambda\} \arrow[u, "\text{DMZ}"'] \arrow[r, "\mathrm{Res}(\Lambda/\cdot)"] & \left\{ \begin{array}{l} \text{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24,\ \mathbf{1}_{24} \in C \end{array} \right\} \arrow[u, "\mathcal{D}\ \text{extended doubling}"']
\end{tikzcd}
$$

これが知りたい

この図式は可換、すべて有限集合で、それぞれの集合には自然な同値関係があり、同値類の集合からの写像が誘導される。

DMZ=Dong–Mason–Zhu (1994)

Doubly Even Codes of Length 24

ここは **Pless–Sloane (1975)** による

$$\{C \subset \mathbb{F}_2^{24} \mid C \textbf{ doubly even, } \dim C = 12\}/\cong$$

の分類を用いる。全部で９個ある。

任意の **doubly even** な $C' \subset \mathbb{F}_2^{24}$ はこれら９個のうちのどれかには（同値を除いて）含まれるので、９個の **12** 次元 **code** の **subcode** をすべて分類すればよい。

（実際にはやらなくてもすでにデータベースもある）
`http://www.rlmiller.org/de_codes/`

Triply Even Codes of Length 48

Thm (Betsumiya–M.). D を長さ 48 の **maximal triply even code** とする。このとき、長さ 24 のある **doubly even codes** C_1, C_2 と全単射線形写像 $f : C_1/R_1 \to C_2/R_2$ が存在して

$$R_i = \{\boldsymbol{x} \in (C_i * C_i)^{\perp} \mid \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}) \equiv 0 \pmod 8$$
$$\mathrm{wt}(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) \equiv 0 \pmod 4 (\forall \boldsymbol{y} \in C_i)\} \subset C_i \quad (i = 1, 2),$$

$$\boldsymbol{x}_1 \in C_1,\ \boldsymbol{x}_2 + R_2 \in f(\boldsymbol{x}_1 + R_1) \implies \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}_1) \equiv \mathrm{wt}(\boldsymbol{x}_2) \pmod 8,$$

$$D \cong \{(\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2) \mid \boldsymbol{x}_1 \in C_1,\ \boldsymbol{x}_2 + R_2 \in f(\boldsymbol{x}_1 + R_1)\}.$$

- 長さ 48 の **triply even code** は、**maximal** な **triply even code** に必ず含まれるから、分類は結局 **maximal** なものに帰着される。
- C_1, C_2 の可能性はすでに列挙してあったので、あとは f の可能性を決定すればよい

Triangular Graph から得られる Triply Even Code

$m \geq 4$ を整数とし、$\binom{m}{2} \times \binom{m}{2}$ 行列 A を次で定義する。行、列は $\{i_1, i_2\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ で **index** されていて、

$$A_{\{i_1,i_2\},\{j_1,j_2\}} = \begin{cases} 1 & \textbf{if } |\{i_1, i_2\} \cap \{j_1, j_2\}| = 1, \\ 0 & \textbf{otherwise} \end{cases}$$

この行列で定まる $\binom{m}{2}$ 点上のグラフを **triangular graph** という。

Thm. $m \equiv 2 \pmod 4$ のとき $\mathrm{span}_{\mathbb{F}_2} A$ は **maximal triply even code** で次元は $m - 2$.

$m = 10$ のとき、長さ 45 の **maximal triply even code** が得られる。

長さ 48 にするために 0 を３つ付け加え、$\mathbf{1}_{48}$ を追加して次元を 1 増やすと、長さ 48 の **maximal triply even code** $\tilde{T}_{10}$ になる。

長さ 48 の Maximal Triply Even Codes の分類

Thm (Betsumiya–M.). 長さ 48 の **maximal triply even code** は次のいずれか

- $\exists$ 分解不可能な長さ 24 の **doubly even self-dual** ($\dim C = 12$) **code** C （7 個）を用いて $\mathcal{D}(C)$ と書ける
- 長さ 8 の **doubly even self-dual code** C （1 個）を用いて $\mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(C)$ と書ける
- 長さ 8 の **doubly even self-dual code** C と長さ 16 の 分解不可能な **doubly even self-dual code** C' （1 個）を用いて $\mathcal{D}(C) \oplus \mathcal{D}(C')$ と書ける
- $\tilde{T}_{10}$

Lam–Yamauchi の定理と Triangular Graph から得られる Code

$\tilde{T}_{10}$ は長さ 48 の **maximal triply even code** である。

Thm (Lam–Yamauchi)**.** $16|n$, $\mathbf{1}_n \in D \subset \mathbb{F}_2^n$, D は **triply even** ならば、ある **framed VOA** V とその **Virasoro frame** F が存在して F に関する **structure code** が D となる。

$\tilde{T}_{10}$ は $V^\natural$ の **Virasoro frame** の **structure code** にはなり得ないことが容易にわかるが、**Lam–Yamauchi** の定理により、何らかの **framed VOA** がこの **structure code** をもつ。

実際、**Lam (2010)** は $\tilde{T}_{10}$ とその **subcode** を **structure code** をもつ新しい **VOA** を構成し、それが **Schellekens (1993)** の表にあるいくつかの **CFT** と対応することを示している。

Betsumiya's Database of Triply Even Codes of Length 48

長さ 48 の **maximal triply even codes** が分類できたので、それらの **subcode** をすべて考えることで、長さ 48 の **triply even codes** がすべて分類できる。

その結果はデータベースとして公開されている。

`http://www.st.hirosaki-u.ac.jp/~betsumi/triply-even/`

Frames of $\Lambda \to$ Virasoro Frames of $V^\natural$

$$\{\text{Virasoro frames of } V^\natural\} \xrightarrow{\text{str}} \mathcal{D}\left(\left\{\begin{array}{l}\text{doubly even } C\\ \text{長さ} = 24\\ \mathbf{1}_{24} \in C\\ \min C^\perp \geq 4\end{array}\right\}\right)$$

これが知りたい

$$\cup\{\text{分解可能}\}$$

$\uparrow$ DMZ

$\uparrow \mathcal{D}$ extended doubling

$$\{\text{frames of } \Lambda\} \xrightarrow{\mathrm{Res}(\Lambda/\cdot)} \left\{\begin{array}{l}\text{doubly even } C\\ \text{長さ} = 24\\ \mathbf{1}_{24} \in C\\ \min C^\perp \geq 4\end{array}\right\}$$

この図式は可換、すべて有限集合で、それぞれの集合には自然な同値関係があり、同値類の集合からの写像が誘導される。

str の像は一部決定できた

できれば **str**$(\{$**Virasoro frames of** $V^\natural\})$ 全体を決定したいのだが . . .

Thm (Lam–Harada–M.)**.**

$$\mathbf{str}(\{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\}) \cap \mathcal{D}\left(\left\{\begin{array}{l}\textbf{doubly even } C\\ \text{長さ} = 24\\ \mathbf{1}_{24} \in C\\ \min C^\perp \geq 4\end{array}\right\}\right)$$
$$= \mathcal{D}(\{\mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } \textbf{Leech lattice の frame}\})$$

$$|\mathcal{D}(\{\mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } \textbf{Leech lattice の frame}\})/{\cong}|$$
$$= |\{\mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } \textbf{Leech lattice の frame}\}/{\cong}|$$
$$= 149$$

Frames of Λ $\to$ Virasoro Frames of $V^\natural$ （再掲）

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c}\{\textbf{Virasoro frames of } V^\natural\} \\ \textcolor{red}{\text{これが知りたい}}\end{array} & \xrightarrow{\textbf{str}} & \begin{array}{l}\mathcal{D}\left(\left\{\begin{array}{l}\textbf{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24 \\ \mathbf{1}_{24} \in C \\ \min C^\perp \geq 4\end{array}\right\}\right) \\ \cup\{\ \textcolor{red}{\text{分解可能}}\ \} \to \textcolor{red}{?}\end{array} \\
\uparrow \textbf{DMZ} & & \uparrow \mathcal{D} \begin{array}{c}\textbf{extended} \\ \textbf{doubling}\end{array} \\
\{\textbf{frames of } \Lambda\} & \textcolor{red}{\xrightarrow{\mathrm{Res}(\Lambda/\cdot)}} & \left\{\begin{array}{l}\textbf{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24 \\ \mathbf{1}_{24} \in C \\ \min C^\perp \geq 4\end{array}\right\}
\end{array}
$$

この図式は可換、すべて有限集合で、それぞれの集合には自然な同値関係があり、同値類の集合からの写像が誘導される。

$\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F})$ の像はわかったが逆像は？

$$\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は } \Lambda \text{ の } \textbf{frame}\} \xrightarrow{\mathrm{Res}(\Lambda/\cdot)} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24 \\ \mathbf{1}_{24} \in C \\ \min C^{\perp} \geq 4 \end{array} \right\}$$

の像は（同値を除いて）**149** 個だが、単射ではない。

Ex.

$$C = \mathrm{span} \begin{bmatrix} H & H & H \\ \mathbf{1}_8 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_8 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1}_8 \end{bmatrix} \quad \text{については } \exists! \mathcal{F},\ \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \cong C.$$

Ex. $C =$ **extended binary Golay code** ($\dim C = 12$) については **Rains (1999)** により $|\{\mathcal{F} \mid \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \cong C\}/\cong| = 13$.

$\mathcal{F} \mapsto \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F})$ による逆像は？

$$\{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ は } \Lambda \text{ の } \textbf{frame}\} \overset{\color{red}\mathrm{Res}(\Lambda/\cdot)}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{doubly even } C \\ \text{長さ} = 24 \\ \mathbf{1}_{24} \in C \\ \min C^{\perp} \geq 4 \end{array} \right\} \ni C$$

$\implies$ $6 \leq \dim C \leq 12$ であり、$6 \leq \dim C \leq 10$ については $\{\mathcal{F} \mid \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \cong C\}/\cong$ は決定済み、しかし $\dim C = 11, 12$ はまだできていない

$$\{\mathcal{F} \mid \mathrm{Res}(\Lambda/\mathcal{F}) \cong C\}/\cong \leftrightarrow \left\{ \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Res}(\mathcal{C}) \cong C \\ \mathcal{C} : \textbf{ type II } \mathbb{Z}_4\textbf{-code} \\ \color{red}\textbf{min. Euclidean wt} = 16 \end{array} \right\} / \cong$$

$$\left| \left\{ \mathcal{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Res}(\mathcal{C}) \cong C \\ \mathcal{C} : \textbf{ type II} \end{array} \right\} \right| = 2^{(k-2)(k+1)/2} \quad (k = \dim C).$$

Rains (1999) による $\mathrm{Aut}(C)$ の 2-Modular 表現

Thm (Rains (1999)). $8|m$, C を長さ m の **doubly even binary code** とし、$\mathbf{1}_m \in C$ とする。このとき、$\mathbb{F}_2$ 上のあるベクトル空間 W と、準同型 $\mathrm{Aut}(C) \to \mathrm{AGL}(W)$ が存在して

$$\{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ は } \textbf{type II}, \ \mathrm{Res}(\mathcal{C}) = C\}/\sim$$
$$\overset{1:1}{\leftrightarrow} \{W \text{ 上の } \mathrm{Aut}(C) \text{ 軌道}\}$$

Ex. C を extended binary Golay code （長さ 24）とすると、
$\dim W = 44$, $|\mathrm{Aut}(C)| = |M_{24}| = 244823040$

$$\text{軌道の数は少なくとも } \left\lceil \frac{2^{44}}{|M_{24}|} \right\rceil = 71857.$$

つまり、minimum Euclidean weight $= 16$ という条件をつけなければ、少なくとも 71857 個の type II code $\mathcal{C}$ が $\mathrm{Res}(\mathcal{C}) = C$ をみたす。そのうちわずか 13 個だけが minimum Euclidean weight $= 16$ となって Leech lattice の frame に対応する。