純粋数学に現れる符号

宗政昭弘
東北大学大学院情報科学研究科

2010年12月21日

数学的対象から得られる符号

{ 数学的対象 } ⟶ { 符号 }

難　易

↑

こちらを調べることで

こちらに関する結果を得たい

Hadamard 行列

Def. n 次正方行列 H が Hadamard 行列 であるとは、成分がすべて ± 1 で、

$$HH^T = nI$$

が成り立つこと。

Ex.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$n = 1, 2, 4, 8, 12, 16, \ldots, 28$ については同値を除いて分類されている。$n = 32, 36, \ldots, 664$ までは存在が確認されている。$n = 668$ は存在が知られていないが、一般に $n \equiv 0 \pmod 4$ ならば存在すると予想されている。

Hadamard 行列から得られる符号

H を n 次 Hadamard 行列とする。p を奇素数とし、H の行で $\mathbb{F}_p$ 上生成される符号を $C_p(H)$ と書く。

$p \nmid n$ だと $C_p(H) = \mathbb{F}_p^n$ となり意味がないので、$p|n$ の場合を考える。

例えば $n = 24$, $p = 3$ とすると、$\dim C_3(H) = 12$.

$p = 2$ で考えるには？

J を all-one matrix とすると、$B = \frac{1}{2}(J + H)$ は成分が $0, 1$ のみ（H において $1, -1$ をそれぞれ $1, 0$ に置き換えたことになる）。

B の行で $\mathbb{F}_2$ 上生成される符号を $C_2(H)$ と書く。

24 次の Hadamard 行列から得られる符号

H を 24 次の Hadamard 行列とすると、

$$\dim C_2(H) = \dim C_3(H) = 12,$$

$$\min C_2(H) \le 8, \quad \min C_3(H) \le 9.$$

Thm (田村–宗政). H の第 1 行がすべて 1 である 24 次の Hadamard 行列とすると、

$$\min C_2(H) = 8 \iff \min C_3(H^T) = 9.$$

（の理由を明らかにした）

これまで、この事実は分類の結果から観察されてはいたが、理由が不明であった。
格子を使うと符号だけでは見えていなかった部分が見えてくる。

Triply even binary codes

Linear code $C \subset \mathbb{F}_2^n$ が triply even とは、

$$\forall x \in C,\ \mathrm{wt}(x) \equiv 0 \pmod 8.$$

Ex. $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $X = \binom{\Omega}{2}$ とし、X を頂点集合とするグラフを次のように作る。

$$\{i, j\} \sim \{k, l\} \iff |\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1.$$

このようにしてできた graph を triangular graph T_n で表す。その隣接行列で生成された code を $C(T_n)$ と書く。
$n \equiv 2 \pmod 4$ のとき $C(T_n)$ は triply even code になる。

Triangular graph

Triangular graph T_{10} から作られる長さ

$$\binom{10}{2} = 45$$

の符号 $C(T_{10})$ と $\mathbf{1}_{48}$ で生成された長さ 48 の binary code は maximal triply even code になる。

これを用いて、新しい holomorphic FVOA, CFT of central charge 24 が構成された（Lam, 2010）。

また、長さ 48 の triply even code の分類（別宮–宗政, 2010）を用いて、Schellekens による 71 個の CFT の可能性のうち 56 個が実現できることが示された（島倉, Lam, 2010）。

期待

$\{$ 数学的対象 $\}$ $\longrightarrow$ $\{$ 符号 $\}$

難　　　　易

$\uparrow$

こちらを調べることで

こちらに関する結果を得たい

だけではなく

$\{$ 数学的対象 $\}$ $\longrightarrow$ $\{$ 使える符号 $\}$

？

$\uparrow$

こちらの要請を聞くことで

こちらから探してくる