Richard Thompson's group F

宗政昭弘

2015 年 8 月 3 日

1　序

Richard Thompson's group F を知ったのは、この群を４色定理の別証明に役立てようとする Bowlin と Brin による preprint [1] からであった。しかし 2015 年 6 月に、V.F.R. Jones [3] が高木レクチャーの講師として東北大学に来たとき、この同じ群が結び目理論に大変役に立つということを示し、大変驚いた。 Braid 群が結び目理論に使われているのはよく知られているが、この群を結び目理論に使う試みも、この群を４色定理に結びつける試みも、どちらも新しいアイデアのようである。しかもこれら２つの論文は他を引用していないことから、おそらく独立にこの群にたどりついたものと考えられる。本講演ではこの群の生成元と基本関係による２通りの定義の同値性を詳細に解説し、PL 同相写像のなす群としての定義、同じ葉の数を持つ２つの木の組の集合による記述を紹介する。群 F そのものの解説は、[2] が詳しい。

2　生成元と基本関係による定義

$$F_1 = \langle a, b \mid [ab^{-1}, b^a] = [ab^{-1}, b^{a^2}] = 1 \rangle,$$
$$F_2 = \langle x_0, x_1, \dots \mid x_n^{x_k} = x_{n+1} \ (0 \le k < n) \rangle.$$

とおくと、実は $F_1 \cong F_2$ で、これが Richard Thompson's group F である。同型については [2] に証明が書かれているが、ややわかりにくい所があったので、ポイントを講演中に問題としたところ、数日後、宮本雅彦氏より簡明な証明が届いた。ここではその方法による同型の証明を紹介したい。ポイントは、上記の群 F_1 の性質をまず調べることである。

補題 1 (宮本雅彦氏による)**.** G を群とし、 $a, b \in G$ が

$$b^a \in C_G(ab^{-1}), \tag{1}$$
$$b^{a^2} \in C_G(ab^{-1}). \tag{2}$$

をみたすとすると、

$$b^{a^n} \in C_G(ab^{-1}) \quad (n \geq 1). \tag{3}$$

Proof. n に関する帰納法で示す。$n=1,2$ のときは仮定より正しい。$n \geq 3$ とし、(3) が $n-2$ と $n-1$ で成り立つと仮定する。特に

$$b^{a^{n-1}} \in C_G(ab^{-1}). \tag{4}$$

また、(3) が $n-2$ について成り立つことは $(b^{a^{n-2}})^{ab^{-1}} = b^{a^{n-2}}$ を意味するので

$$b^{a^{n-1}} = b^{a^{n-2}b}. \tag{5}$$

よって

$$\begin{aligned} b^{a^n} &= (b^{a^{n-1}})^a \\ &= (b^{a^{n-2}b})^a && ((5)\text{ より}) \\ &= b^{a^{n-1}a^{-1}ba} \\ &= (b^{a^{n-1}})^{b^a} \\ &\in C_G(ab^{-1}) && ((1), (4)\text{ より}). \end{aligned}$$

□

次に、群 F_2 の基本関係を書き直すため、次の補題を用意する。

補題 2. $x_0, x_1, \ldots$ を群 G の元とすると、次は同値。

(i) $x_n^{x_k} = x_{n+1}$ $(0 \leq k < n)$,

(ii) $[x_0x_1^{-1}, x_n] = 1$, $x_1^{x_0^{n-1}} = x_n$ $(n \geq 2)$.

Proof. (i) $\Longrightarrow$ (ii). $k=0,1$ とおくと、任意の $n \geq 2$ に対して $x_n^{x_0} = x_n^{x_1}$ だから $[x_0x_1^{-1}, x_n] = 1$ が成り立つ。次に $x_1^{x_0^{n-1}} = x_n$ $(n \geq 2)$ を n に関する帰納法で示す。$n=2$ のときは (i) で $(k,n)=(0,1)$ とおけばよい。n のとき正しいとすると、$x_1^{x_0^{n-1}} = x_n$ より

$$\begin{aligned} x_1^{x_0^n} &= x_1^{x_0^{n-1}x_0} \\ &= x_n^{x_0} \\ &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). k に関する帰納法で示す。$k=0$ のときは

$$\begin{aligned} x_n^{x_0} &= x_1^{x_0^{n-1}x_0} \\ &= x_1^{x_0^n} \end{aligned}$$

$$= x_{n+1}$$

次に、$k=1$ のときは、$n \geq 2$ に対して、$[x_0 x_1^{-1}, x_n] = 1$ より

$$\begin{aligned} x_n^{x_1} &= x_n^{x_0} \\ &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

最後に、$k \geq 2$ とし、$k-1$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} x_n^{x_k} &= x_n^{x_1^{x_0^{k-1}}} \\ &= x_n^{x_0^{-(k-1)} x_1 x_0^{k-1}} \\ &= x_n^{x_1^{-(k-1)} x_1 x_0^{k-1}} && ([x_0 x_1^{-1}, x_n] = 1 \text{ より}) \\ &= x_n^{x_1^{-k+2} x_0^{k-1}} \\ &= x_n^{x_0^{-k+2} x_0^{k-1}} && ([x_0 x_1^{-1}, x_n] = 1 \text{ より}) \\ &= x_n^{x_0} \\ &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

□

これらの補題を用いると、2 つの群 F_1, F_2 が同型であることは容易にわかる。実際、

$$\begin{aligned} F_2 &\cong \langle x_0, x_1, \ldots \mid [x_0 x_1^{-1}, x_n] = 1,\ x_1^{x_0^{n-1}} = x_n\ (n \geq 2) \rangle && (\text{補題 2 より}) \\ &\cong \langle x_0, x_1 \mid [x_0 x_1^{-1}, x_1^{x_0^{n-1}}] = 1\ (n \geq 2) \rangle \\ &\cong \langle a, b \mid [ab^{-1}, b^{a^{n-1}}] = 1\ (n \geq 2) \rangle \\ &\cong \langle a, b \mid [ab^{-1}, b^a] = [ab^{-1}, b^{a^2}] = 1 \rangle && (\text{補題 1 より}) \\ &\cong F_1. \end{aligned}$$

3 PL 同相群

Richard Thompson's group F の本来の定義は、次の条件をみたす piecewise linear 同相写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ 全体の、合成に関する群である。

(i) f は有限個の $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ に含まれる点を除いて微分可能

(ii) f が微分可能な点においては微分係数は 2^n $(n \in \mathbb{Z})$ の形

F の元は有限個の微分不可能な点と、その点における値で定まるので、$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap [0,1]$ の有限部分集合 2 つの組と考えても良い。しかしどんな部分集合の組でも良いわけではない。なぜなら、$\frac{1}{4}, \frac{5}{8}$ で微分不可能で、これらの点における値が $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ であるような piecewise linear な関数は、$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ における微分係数が $\frac{2}{3}$ となるので、これは (ii) をみたさない。

4　木

$$
\begin{aligned}
\{0,1\}^* &= \bigcup_{n=0}^{\infty} \{0,1\}^n \\
&= \{\varnothing, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}
\end{aligned}
$$

を $0,1$ を alphabet とする語全体の集合とする。ただし、$\{0,1\}^0 = \{\varnothing\}$ と解釈する。空でない有限部分集合 $T \subset \{0,1\}^*$ が木であるとは、

(i) $\varnothing \in T$,

(ii) $\forall v \in T$, $\{v0, v1\} \subset T$ または $\{v0, v1\} \cap T = \emptyset$

をみたすときをいう。木 T に対して、

$$L(T) = \{v \in T \mid \{v0, v1\} \cap T = \emptyset\}$$

を T の葉の集合という。

$$\mathcal{T}_n = \{T \mid T \text{ は木で } |L(T)| = n\} \quad (n \geq 1)$$

とおく。$\mathcal{T}_n$ の元は、２進展開によって $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ の元による区間 $[0,1]$ の分割を自然に生み出す。これにより、$\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n$ の元は前節の PL 同相写像を定義することがわかる。つまり、$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n$ から F への全射があるのである。Bowlin–Brin [1] には、ここから全単射 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n / \sim \to F$ を作るための同値関係 $\sim$ と、$\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n$ から得られる球面の三角形分割を通して、４色定理を F の言葉で言い換えることに成功している。

参考文献

[1] Bowlin, G., Brin, M.: Coloring planar graphs via colored paths in the associahedra. Int. J. Algebra Comput. 23, 1337–1418 (2013)

[2] Cannon, J.W., Floyd, W.J., Parry, W.R.: Introductory notes on Richard Thompson's groups. Enseign. Math. (2) 42(3–4), 215–256 (1996)

[3] V.F.R. Jones, Some unitary representations of Thompson's groups F and T. preprint arXiv:1412.7740v1.