# Fomin’s Improvement of the Thompson-Wielandt Theorem

東北大学情報科学研究科
宗政 昭弘

2019 年 7 月 27 日

## 1 序

置換群論における有名な予想として，Sims 予想というのがある。これは原始置換群において，1 点の固定群の位数が部分軌道の長さだけの関数で抑えられるというものである。Sims 予想はグラフの自己同型群の言葉で言い換えることもできる。実際，頂点上原始的に作用する自己同型群を持つ，$d$ 正則な任意のグラフに対して，1 点 $x$ を固定すると，$x$ から $d$ だけの関数 $\psi(d)$ までの距離の点をすべて固定する自己同型は自明なものに限る，ということである。予想自体は有限単純群の分類を使って，Cameron, Praeger, Saxl, Seitz [1] によって解決されているが，2017 年にロシアのエカテリンブルグで開催された国際会議で，Kondrat’ev による講演があり，上記の関数 $\psi(d)$ を定数関数 6 にとることができる，という報告があった。Kondrat’ev と Trofimov はさらにほとんどの群については 6 より小さくとることも可能で，どのような群に対してどれくらい小さくとれるかを現在研究しているとのことであった。詳しいことは [8] に要約されているので，それを参照するか，原論文 [4, 5, 6, 7] を参照していただきたい。これらの研究において出発点になっているのが，Fomin [2] による Thompson–Wielandt の定理の改良版である。この結果は最近までロシア語でしか出版されていなかったため，ロシア以外ではあまり知られていないようである。実際，草津セミナーの直前にあたる 2019 年 6 月にスロベニアで開催された国際会議において，Cheryl Praeger に会う機会があったので，Fomin による改良版について知っているか尋ねてみたところ，知らないという返答であった。また，草津セミナーの翌月，中国・湖北省で開催された国際会議において，Peter Cameron と会う機

会があった。Fomin による改良版について知っているか尋ねてみたところ，驚きの答えが返ってきた。Fomin による改良版と Thompson–Wielandt のオリジナルの違いを説明するや否や，「僕はまさにそのことを以前 Wielandt に尋ねたことがある」と答えたのである。一体いつのことかと不思議に思ったが，1970 年代の前半であろうとのことである。Cameron は当時すでに改良版を予想していたものの，それが 1990 年になって Fomin によって証明されたことまでは知らなかったようである。

そもそも，Thompson–Wielandt の定理というのは，原始置換群 $G$ において，1 点の固定部分群を 2 つ取り，コアをとるという操作を 3 回繰り返すことで得られた 2 つの部分群（下では $U, V$）のうちの**少なくとも**一方が $p$ 群になる，という定理である。Fomin による改良版とは，$U, V$ のうち片方が自明になる場合を除けば，実は**両方とも** $p$ 群になる，という定理である。以下のように，この 2 つの部分群は作り方が似ているので，片方が $p$ 群であればもう片方もそうであろうというのはもっともに見える。実際，最初にとった 1 点の固定部分群 $H, K$ に対してこれらを入れ替える $g \in G$, すなわち $H^g = K$ かつ $K^g = H$ となる $g$ が存在すれば，$U$ と $V$ は共役なので，片方が $p$ 群ならばもう片方も当然 $p$ 群である。しかしこのような $g$ の存在は一般には言えないので，Fomin による改良は非自明なのである。Fomin は 1990 年にこの改良版を証明した論文 [2] をスベルドロフスク（現在のエカテリンブルグ）で開催された群論の研究集会の報告集にロシア語で書いているが，Kondrat'ev と Trofimov が [4, Prop. 1.1] で証明を含めて書くまで，英語で書かれた文献がなかった。本稿では，Fomin [2] の原論文に基づいて，仮定を少し弱くしたバージョンの証明を，有限群論初心者（著者を含む）向けに書くことにした。

## 2 準備

この節においては，$G$ は有限群，$p$ は素数とする。

**補題 1** ([9, 3.1.10 on p. 61])**.** $P$ を $G$ の $p$ 部分群とし，$|G : P| \equiv 0 \pmod p$ とすると，$P < N_G(P)$ である。

**補題 2.** $A, B$ を $G$ の部分群とし，$A_1 \leq A$, $A_1 B = BA_1$ とすると，$(A \cap B)A_1 = A \cap BA_1$ である。

*Proof.* 仮定より $BA_1$ は部分群であり，$A \cap B, A_1$ は部分群 $A \cap BA_1$ に含まれるので，$(A \cap B)A_1 \leq A \cap BA_1$ である。逆に，$b \in B$, $a \in A_1$ で $ba \in A$ とすると，$b \in A$ なので $ba \in (A \cap B)A_1$ となる。 □

**定義 3.** $G$ の最大正規 $p$ 部分群を $O_p(G)$ と書く。また，$G$ の正規部分群でそれによる $G$ の商群が $p$ 群になるようなものの最小のものを $O^p(G)$ と書く。

明らかに $O_p(G)$, $O^p(G)$ は $G$ の特性部分群である。これらの基本的性質をまとめておく。

**補題 4.** (i) $G$ が $p$ 群でなければ $O^p(G) \neq 1$ である。

(ii) $G$ が単位群でない $p$ 群ならば $O_p(G) \neq 1$ である。

(iii) $O^p(G) = O^p(O^p(G))$ が成り立つ。

(iv) $H \leq G$ ならば $H \cap O_p(G) \leq O_p(H)$ である。

(v) $N \lhd G$ ならば $O_p(N) \leq O_p(G)$ である。等号成立は $O_p(G) \leq N$ のとき。

(vi) $H \leq G$ ならば $H \cap O^p(G) \geq O^p(H)$ である。

(vii) $N \lhd G$ ならば $O^p(N) \leq O^p(G)$ である。等号成立は $|G:N|$ が $p$ べきのとき。

*Proof.* (i) は定義より直ちにわかる。(ii) は $1 \neq Z(G) \leq O_p(G)$ より従う。(iii) は $O^p(O^p(G)) \lhd G$ で $|G:O^p(O^p(G))| = |G:O^p(G)||O^p(G):O^p(O^p(G))|$ が $p$ べきであることから，$O^p(G)$ の最小性よりわかる。(iv) は $H \cap O_p(G) \lhd H$ であるから $O_p(H)$ の最大性より従う。(v) の前半は $O_p(N) \lhd G$ であることから $O_p(G)$ の最大性より従う。後半は (iv) よりわかる。(vi) は，$H/H \cap O^p(G) \cong HO^p(G)/O^p(G)$ であり，その位数は $|G:O^p(G)|$ の約数だから $p$ べきである。すると $O^p(H)$ の最小性より従う。(vii) の前半は (vi) より直ちにわかる。(vii) の後半を示すために，$|G:N|$ が $p$ べきだと仮定する。このとき $|G:O^p(N)| = |G:N||N:O^p(N)|$ も $p$ べきになり，$O^p(G)$ の最小性より $O^p(N) \geq O^p(G)$ がわかるので等号が成り立つ。 □

**補題 5.** $N \lhd G$ ならば $O_p(G) = O_p(C_G(N/O_p(N)))$.

*Proof.* $O_p(G) \lhd G$ より $[O_p(G), N] \lhd G$ および $[O_p(G), N] \leq O_p(G) \cap N$ が成り立つ。したがって $[O_p(G), N]$ は $N$ の正規 $p$ 部分群となるので $[O_p(G), N] \leq O_p(N)$ を得る。よって $O_p(G)$ は $N/O_p(N)$ に自明に作用するが，これは $O_p(G) \leq C_G(N/O_p(N))$ を意味している。すると補題 4 (v) の等号成立条件より主張が得られる。 □

**定義 6.** 群 $G$ の部分群 $H, K$ に対して，$H$ の $K$ コアを

$$H_K = \bigcap_{k \in K} H^k$$

で定義する。$H$ の $G$ コアが自明なとき，$H$ は $G$ **コアフリー**，または単に**コアフリー**と呼ぶ。

明らかに，$K \le N_G(H_K)$ であり，したがって

$$H_K \cap K \lhd K \tag{1}$$

が成り立つ。また，$G$ が可移置換群で $H$ が $G$ における 1 点の固定部分群のとき，$H$ はコアフリーである。

## 3　Thompson–Wielandt の定理とその改良版

以下，$G$ は有限群とし，$H, K$ は $G$ の異なる真部分群とする。部分群 $D, M, N, E, U, V$ を次のように定義する（図 1 参照)。

$$D = H \cap K, \tag{2}$$
$$M = D_H = H \cap K_H, \tag{3}$$
$$N = D_K = H_K \cap K, \tag{4}$$
$$E = M \cap N, \tag{5}$$
$$U = E_H = N_H, \tag{6}$$
$$V = E_K = M_K. \tag{7}$$

以下を仮定する。

$$1 \ne \forall D_0 \le D,\ N_G(D_0) \supsetneqq H \text{ ではなく}, N_G(D_0) \supsetneqq K \text{ でもない}. \tag{8}$$

次の定理が Thompson–Wielandt の定理（オリジナル版）である。

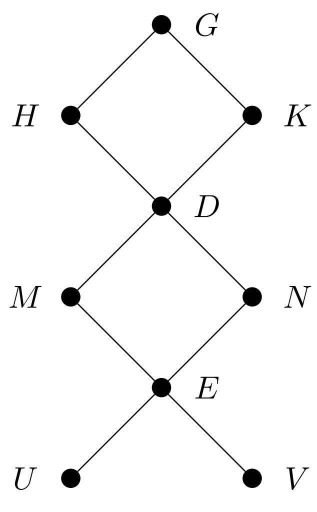


図 1　設定

**定理 7** ([3, Theorem 9.24])**.** $H, K$ は $G$ の異なる真部分群とし，記号 (2)–(7) の下で条件 (8) を仮定すると，少なくとも $U$ と $V$ の一方は，ある素数 $p$ に関して $p$ 群になる。

Fomin による定理 7 の改良版を，筆者が可能な限り仮定を弱めた形で述べる。定理 7 と全く同じ仮定で導出できるかどうかは現時点ではわかっていない。改良版は原始置換群から出発しているので，既出の条件 (8) よりも強い仮定をしているが，本稿では，(8) より少しだけ強い条件で改良版の結論が得られることを示す。その条件とは以下の通りである。

$$\begin{aligned} &1 \neq \forall D_0 \leq H,\ N_G(D_0) \supsetneqq H \text{ ではなく，} \\ &1 \neq \forall D_0 \leq K,\ N_G(D_0) \supsetneqq K \text{ ではない.} \end{aligned} \tag{9}$$

明らかに (9) ならば (8) が成り立っている。この条件は，$H$ および $K$ の，単位群と異なる任意の部分群の正規化群がそれぞれ $H$ および $K$ を含むほどには大きくない，ということであり，(8) はより狭く，$D$ の単位群と異なる任意の部分群について同じ性質が成り立つということである。

**補題 8.** $H, K$ は $G$ の異なる真部分群とし，条件 (9) を仮定すると，

$$\begin{aligned} 1 \neq B \lhd H &\implies N_G(B) = H, \\ 1 \neq B \lhd K &\implies N_G(B) = H. \end{aligned}$$

*Proof.* 仮定 (9) より直ちにわかる。 □

Fomin による定理 7 の改良版を証明するために，補題をもう一つ用意する。(1) より

$$M \lhd H, \tag{10}$$
$$N \lhd K, \tag{11}$$
$$U \lhd H, \tag{12}$$
$$V \lhd K. \tag{13}$$

特に

$$N \lhd D, \tag{14}$$
$$U \lhd N, \tag{15}$$
$$V \lhd M. \tag{16}$$

**補題 9.** $C$ を次で定義する

$$C = C_K(N/O_p(N)). \tag{17}$$

このとき

$$O_p(K) = O_p(C). \tag{18}$$

*Proof.* (11) より補題 5 が使える。 □

**定理 10.** $H, K$ は $G$ の異なる真部分群とし，記号 (2)–(7) の下で条件 (9) を仮定すると，$U \neq 1$ かつ $V \neq 1$ ならば，ある素数 $p$ に関して $UV$ は $p$ 群となる。

*Proof.* 仮定 (9) より (8) が成り立っているので，定理 7 より，ある素数 $p$ が存在して $U$ または $V$ が $p$ 群になる。一般性を失うことなく，$V$ が $p$ 群であるとしてよい。すると補題 4 (ii) より $O_p(V) \neq 1$ だから (13), (16) と補題 4 (v) より

$$O_p(K) \neq 1, \tag{19}$$
$$O_p(M) \neq 1. \tag{20}$$

(10), (20) と補題 4 (v) より

$$O_p(H) \neq 1. \tag{21}$$

補題 8 を (19), (21) に適用して

$$\begin{aligned} N_G(O_p(K)) &= K, \\ N_G(O_p(H)) &= H. \end{aligned} \tag{22}$$

仮定より $H \neq K$ だから

$$O_p(H) \neq O_p(K). \tag{23}$$

今，$U$ は $p$ 群でないと仮定する。

$$A = O^p(U)$$

とおくと，補題 4 (i) より $A \neq 1$ であり，(12) より $A \lhd H$ である。よって，補題 8 より

$$N_G(A) = H. \tag{24}$$

(15) より $A \lhd N$ だから $A \lhd AO_p(N)$ である。補題 4 (vii) の等号成立条件より

$$\begin{aligned} O^p(AO_p(N)) &= O^p(A) \\ &= O^p(O^p(U)) \\ &= O^p(U) && \text{(補題 4 (iii) より)} \end{aligned}$$

$$= A. \tag{25}$$

$C$ を (17) で定義すると

$$\begin{aligned}
C &\le C_K(AO_p(N)/O_p(N)) \\
&\le N_K(AO_p(N)) \\
&\le N_K(O^p(AO_p(N))) \\
&= N_K(A) && \text{((25) より)} \\
&= N_G(A) \cap K. \\
&= H \cap K && \text{((24) より)} \\
&= D. && (26)
\end{aligned}$$

よって $C$ の定義 (17) より $C = C_D(N/O_p(N))$ となるので，(14) より補題 5 が適用できて

$$\begin{aligned}
O_p(D) &= O_p(C) \\
&= O_p(K) && \text{((18) より)}. && (27)
\end{aligned}$$

特に

$$\begin{aligned}
O_p(K) &\le D \\
&\le H && \text{((2) より)}. && (28)
\end{aligned}$$

したがって，$O_p(H)O_p(K)$ は $H$ の $p$ 部分群であり，(23) よりそれは $O_p(K)$ より真に大きい。すると補題 1 より

$$\begin{aligned}
O_p(K) &< N_{O_p(H)O_p(K)}(O_p(K)) \\
&= N_G(O_p(K)) \cap O_p(H)O_p(K) \\
&= K \cap O_p(H)O_p(K) && \text{((22) より)} \\
&= (K \cap O_p(H))O_p(K) && \text{(補題 2 より)} \\
&= (D \cap O_p(H))O_p(K) && \text{((2) より)} \\
&\le O_p(D)O_p(K) && \text{(補題 4 (iv) より)} \\
&= O_p(K) && \text{((27) より)}.
\end{aligned}$$

これは矛盾である。 □

**系 11** ([2, Proposition 1(i)])**.** $G$ を原始置換群，$H, K$ を $G$ の異なる点の固定部分群とする。記号 (2)–(7) の下で $U \ne 1$ かつ $V \ne 1$ ならば，ある素数 $p$ に関して $UV$ は $p$ 群となる。

*Proof.* $H, K$ はともに $G$ の極大部分群なので，(9) は

$$\begin{aligned} 1 \neq \forall D_0 \leq H,\ N_G(D_0) \neq G, \\ 1 \neq \forall D_0 \leq K,\ N_G(D_0) \neq G \end{aligned} \tag{29}$$

と書き換えられるが，$H, K$ はコアフリーなので，(29) は明らかに成り立つ。よって条件 (9) がみたされるので定理 10 の結論が成り立つ。 □

## 謝辞

本稿を書くにあたって，Fomin の原論文 [2] のコピーを送ってくださった Anatoly Kondrat'ev 氏と原論文を読むのを手伝ってくださった Natalia Maslova 氏に深く感謝する。

# 参考文献

[1] P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl, and G. M. Seitz. On the Sims conjecture and distance transitive graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):499–506, 1983.

[2] A. N. Fomin. Properties of suborbits of finite primitive permutation groups. In *Group-theoretic investigations (Russian)*, pages 87–94. Akad. Nauk SSSR Ural. Otdel., Sverdlovsk, 1990.

[3] I. Martin Isaacs. *Finite group theory*, volume 92 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[4] A. S. Kondrat' ev and V. I. Trofimov. Stabilizers of the vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. I. (Russian), *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 20(4):143–152, 2014; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 289 (2015), suppl. 1, S146–S155.

[5] A. S. Kondrat' ev and V. I. Trofimov. Stabilizers of the vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. II. (Russian), *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 22(2):177–187, 2016; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 295 (2016), suppl. 1, S89–S100.

[6] A. S. Kondrat' ev and V. I. Trofimov. Stabilizers of the vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. III. (Russian), *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 22(4):163–172, 2016; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 299 (2017), suppl. 1, S113–S122.

[7] A. S. Kondrat' ev and V. I. Trofimov. Stabilizers of the vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. IV. (Russian), *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 24(3):109–132, 2018; translation in Proc. Steklov Inst. Math., to appear.

[8] Anatoly S. Kondrat'ev and Vladimir I. Trofimov. Vertex stabilizers of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. In *Groups St Andrews 2017 in Birmingham*, volume 455 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 419–426. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.

[9] Hans Kurzweil and Bernd Stellmacher. *The theory of finite groups*, *Universitext.* Springer-Verlag, New York, 2004.