

2011年5月10日

命題とは、式や文章で表された事柄で、正しい（真）か正しくない（偽）か明確に定まるもの。

文字（ $x$  など）を含んだ命題で、 $x$  の値によって真偽が変わるものを（ $x$  に関する）条件という。

- 条件  $p$  の否定を  $\bar{p}$  と書く。明らかに  $\bar{\bar{p}} = p$
- $p \wedge q$  (“ $p$  and  $q$ ,” “ $p$  かつ  $q$ ” とも書く)
- $p \vee q$  (“ $p$  or  $q$ ,” “ $p$  または  $q$ ” とも書く)
- $(\bar{p} \vee q)$  を  $(p \implies q)$  と書く。
- $((p \implies q) \wedge (q \implies p))$  を  $p \iff q$  と書く。
- $p \implies q$  が成り立つとき  $p$  を  $q$  の十分条件、 $q$  を  $p$  の必要条件という。
- $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$
- $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$
- $(p \implies q) = (\bar{q} \implies \bar{p})$  (対偶)
- $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

次の命題

すべての実数  $x$  に対し、 $x^2 \geq 0$  である

は、無限個の命題を  $\wedge$  で結んだものと考えられる。一般に、 $q(x)$  を  $x$  に関する条件とするとき、

$$\forall x, q(x)$$

によって、想定されるすべての  $x$  について  $q(x)$  が真である、ということを表すが、「想定される」 $x$  を条件  $p(x)$  によって規定するときには

$$\forall x : p(x), q(x)$$

と書く。例えば

$$\forall x : \text{実数}, x^2 - x + 1 > 0$$

は真であるが、

$$\forall x : \text{実数}, x^2 - x - 1 > 0$$

は偽である。一方、

$$\exists x, p(x)$$

によって、想定されるどれかの  $x$  について  $p(x)$  が真である、ということを表す。「 $p(x)$  を満たす  $x$  が存在する」または「ある  $x$  に対して  $p(x)$  が成り立つ」と読む。

また、詳しくは次回紹介するが、「集合」を用いることで「 $\forall x$ : 実数」を「 $\forall x \in \mathbb{R}$ 」と書くことができる。例えば

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 > 0$$

は真であり、

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x - 1 \leq 0$$

も真である。

同様に、正整数の集合は  $\mathbb{N}$ , 整数の集合は  $\mathbb{Z}$ , 有理数の集合は  $\mathbb{Q}$ , 複素数の集合は  $\mathbb{C}$  で表す。

- $(\overline{\forall x, p(x)}) = (\exists x, \overline{p(x)})$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq 1$
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0, \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{1000})$

極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  の定義は

$$\forall \varepsilon > 0, (\exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N} : n > n_0, |a_n - a| < \varepsilon))$$

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  を  $\mathbb{R}^n$  のベクトルとする。これらが一次独立とは

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{a}_i = 0 \text{ となるのは } (c_1, c_2, \dots, c_k) = (0, 0, \dots, 0) \text{ のときに限る}$$

が成り立つときをいう。これを論理記号  $\forall, \exists, \wedge, \vee$  などを用いて書き直してみよ。また一次独立でない（一次従属という）という条件をこれらの記号で書き表してみよ。

**定理 1.**  $A$  を  $m \times n$  行列とする。このとき、 $\text{rank } A$  は、 $A$  の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

**定理 2.**  $f(x), g(x)$  を複素数を係数に持つ  $x$  の多項式とする。 $f(a) = 0$  なる任意の複素数  $a$  に対して  $g(a) = 0$  が成り立てば、 $g(x)$  のあるべき  $g(x)^n$  が  $f(x)$  で割り切れる。

これらの定理を論理記号を用いて書き表してみよ。