2011年7月26日

復習（2011年5月31日より）

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{f\in J^I}\prod_{i=1}^{m} a_{i,f(i)}$$

ただし $I=\{1,\ldots,m\}$, $J=\{1,\ldots,n\}$ である。

正整数の分割

n を正整数とするとき、正整数の列 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ が n の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

(1) $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i = n$,

(2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$.

例えば、4 の分割は

$$\begin{aligned}&4\\&3,1\\&2,2\\&2,1,1\\&1,1,1,1\end{aligned}$$

の 5 個である。n の分割 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ に対して、

$$\alpha_i = |\{j \mid 1\leq j\leq k,\ \lambda_j = i\}| \quad (1\leq i\leq n)$$

とおくと、

$$\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n \tag{*}$$

が成り立つ。逆に、非負整数の列 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ で条件 (*) をみたすものから、n の分割

$$\underbrace{n,\ldots,n}_{\alpha_n},\quad \underbrace{\ldots,}_{\ldots}\quad \underbrace{1,\ldots,1}_{\alpha_1}$$

が得られる。したがって、$p(n)$ で n の分割の総数を表すと、

$$p(n) = |\{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n \mid \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n\}|$$

$$= |\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1, \ldots, n\}^n \mid \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n\}|$$

$$= |\{f \in \{0, 1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,n\}} \mid \sum_{i=1}^{n} if(i) = n\}|$$

一方、形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において、

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 - x) = 1$$

が成り立つ。同様に

$$(1 + x^i + x^{2i} + \cdots)(1 - x^i) = 1$$

も成り立つ。$\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1}$ は形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において意味を持ち、

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \sum_{f \in \{0,1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,n\}}}^{n} \prod_{i=1}^{n} x^{if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= \sum_{f \in \{0,1,\ldots,n\}^{\{1,\ldots,n\}}}^{n} x^{\sum_{i=1}^{n} if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\
&= |\{f \in \{0, 1, \ldots, n\}^{\{1,\ldots,n\}} \mid \sum_{i=1}^{n} if(i) = n\}| \\
&= p(n).
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1}.$$

ただし、$p(0) = 1$ とする。すると、$p(n)$ の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^{n} q_m p(n - m) = 0, \quad \text{ただし } \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i).$$