2011年7月26日配布
2011年8月2日提出
2011年8月9日返却

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)$$

によって $\{q_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定義する。$q_0, q_1, \ldots, q_6$ を決定せよ。これと

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = 1$$

を用いて、$p(0), p(1), \ldots, p(6)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

解答

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m &= \prod_{j=1}^{\infty}(1-x^j)\prod_{j=6}^{\infty}(1-x^j)\prod_{j=7}^{\infty}(1-x^j) \\
&= (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7+\cdots) \\
&= (1-x-x^2+x^5+2x^7+\cdots)(1-x^7+\cdots) \\
&= 1-x-x^2+x^5+x^7+\cdots
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
q_0 &= 1, \\
q_1 &= -1, \\
q_2 &= -1, \\
q_3 &= 0, \\
q_4 &= 0, \\
q_5 &= 1, \\
q_6 &= 0.
\end{aligned}$$

よって、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = 1$$

における x^6 の係数を比較して

$$\sum_{i=0}^{6} p(i)q_{6-i} = 0.$$

したがって

$$p(1) - p(4) - p(5) + p(6) = 0.$$