

2013年5月21日配布
2013年6月4日提出
2013年6月11日返却

1.

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X, ad = bc\}$$

とおくと、 R は X 上の同値関係になる。 R による商集合 X/R に演算 $-$ を次のように定義する。

$$- : (X/R) \times (X/R) \rightarrow X/R, -([a, b], [c, d]) = [ad - bc, bd].$$

この写像 $-$ は well-defined であることを示せ。

2. m を正の整数とし、 $a \in \mathbb{Z}$ が m で割り切れるとき $m|a$ と書く。

$$R = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, m|(a - b)\}$$

とおくと、 R は \mathbb{Z} 上の同値関係になる。 R による商集合 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に演算 \times を次のように定義する。

$$\times : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \times([a], [b]) = [ab].$$

この写像 \times は well-defined であることを示せ。

1. $[a, b] = [a', b']$, $[c, d] = [c', d']$ とすると

$$ab' = ba' \text{ and } cd' = dc'. \tag{1}$$

よって

$$\begin{aligned} (ad - bc)(b'd') &= (ad)(b'd') - (bc)(b'd') \\ &= (ab')(dd') - (bb')(cd') \\ &= (ba')(dd') - (bb')(c'd) && ((1) \text{ より}) \\ &= (a'd')(bd) - (b'c')(bd) \\ &= (a'd' - b'c')(bd) \end{aligned}$$

となるので $[ad - bc, bd] = [a'd' - b'c', b'd']$.

2.

$$\begin{aligned} [a] &= [a'] \text{ and } [b] = [b'] \\ \implies m|(a - a') \text{ and } m|(b - b') \\ \implies m|(a - a')b \text{ and } m|a'(b - b') \\ \implies m|((a - a')b + a'(b - b')) \\ \implies m|(ab - a'b') \\ \implies [ab] &= [a'b']. \end{aligned}$$