

2013年7月9日

復習

$$\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{f \in J^I} \prod_{i=1}^m a_{i,f(i)}$$

ただし $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$ である。

正整数の分割

n を正整数とするとき、正整数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ が n の分割であるとは、次の条件をみたすときをいう。

- (1) $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$,
- (2) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

例えば、4 の分割は

4
3, 1
2, 2
2, 1, 1
1, 1, 1, 1

の5個である。 n の分割 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ に対して、

$$\alpha_i = |\{j \mid 1 \leq j \leq k, \lambda_j = i\}| \quad (1 \leq i \leq n)$$

とおくと、

$$\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n \quad (*)$$

が成り立つ。逆に、非負整数の列 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で条件 (*) をみたすものから、 n の分割

$$\underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n} \quad \dots \quad \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1}$$

が得られる。ここで、上の表記において、もちろん $\alpha_n = 0$ または 1 であり、 $\alpha_n = 1$ のときは $\alpha_i = 0$ ($\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$) である。

$p(n)$ で n の分割の総数を表すと、

$$\begin{aligned} p(n) &= |\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \mid \sum_{i=1}^n i\alpha_i = n\}| \\ &= |\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1, \dots, n\}^n \mid \sum_{i=1}^n i\alpha_i = n\}| \\ &= |\{f \in \{0, 1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}} \mid \sum_{i=1}^n if(i) = n\}| \end{aligned}$$

一方、形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において、

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 - x) = 1$$

が成り立つ。同様に

$$(1 + x^i + x^{2i} + \dots)(1 - x^i) = 1$$

も成り立つ。 $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}$ は形式的べき級数環 $\mathbb{R}[[x]]$ において意味を持ち、

$$\begin{aligned} &\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - x^i)^{-1} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^n x^{ij} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= \sum_{f \in \{0, 1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}}} \prod_{i=1}^n x^{if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= \sum_{f \in \{0, 1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}}} x^{\sum_{i=1}^n if(i)} \text{ における } x^n \text{ の係数} \\ &= |\{f \in \{0, 1, \dots, n\}^{\{1, \dots, n\}} \mid \sum_{i=1}^n if(i) = n\}| \\ &= p(n). \end{aligned}$$

すなわち、

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}.$$

ただし、 $p(0) = 1$ とする。すると、 $p(n)$ の間の関係式がわかる。

$$\sum_{m=0}^n q_m p(n-m) = 0, \quad \text{ただし} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i).$$

$\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ の展開

$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ を求めるために、 $\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ を展開する。 $\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)$ における x^n の係数は $\prod_{i=1}^n(1-x^i)$ における x^n の係数に等しく、

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n(1-x^i) &= \prod_{i=1}^n \sum_{j=0}^1 (-x^i)^j \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\}} \prod_{i=1}^n (-x^i)^{f(i)} \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\}} (-1)^{\sum_{i=1}^n f(i)} x^{\sum_{i=1}^n if(i)} \\ &= \sum_{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\}} (-1)^{|\{i|f(i)=1\}|} x^{\sum_{i=1}^n if(i)} \end{aligned}$$

における x^n の係数 q_n は

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\} \\ \sum_{i=1}^n if(i)=n}} (-1)^{|\{i|f(i)=1\}|} \\ &= \sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\} \\ \sum_{i=1}^n if(i)=n \\ |\{i|f(i)=1\}| \text{ は偶数}}} 1 + \sum_{\substack{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{0,1\} \\ \sum_{i=1}^n if(i)=n \\ |\{i|f(i)=1\}| \text{ は奇数}}} (-1) \\ &= |\{f \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}, \sum_{i=1}^n if(i) = n, |\{i \mid f(i) = 1\}| \text{ は偶数}\}| \\ &\quad - |\{f \mid f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}, \sum_{i=1}^n if(i) = n, |\{i \mid f(i) = 1\}| \text{ は奇数}\}| \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} E_n &= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = n, k \text{ は偶数}\}, \\ O_n &= \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^k \mid \lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = n, k \text{ は奇数}\} \end{aligned}$$

とおくと

$$q_n = |E_n| - |O_n|.$$