

# Analysis of Mathematical Model for Epidemic Dynamics with Decaying Immunity of Vaccination: Theoretical Implication for The Case of Measles

\*Reika Kokoda and \*\*Hiromi SENO

\**Department of Mathematical Biology, Graduate School of Natural Science,  
Dokosoko University, Kyoto 606-85xx JAPAN*

\*\**Department of Mathematical and Life Sciences, Graduate School of Science,  
Hiroshima University, Higashi-hiroshima 739-8526 JAPAN*

xxxxxx@hiroshima-u.ac.jp

ワクチン接種による免疫力の失活を伴う伝染病の感染ダイナミクスに関する  
数理モデル考察：麻疹感染に対する理論的示唆

\* 湖子田麗香・\*\* 瀬野裕美

\* 何処大学自然科学研究院数理生物学専攻, \*\* 広島大学大学院理学研究科数理分子生命理学専攻

Recently it is discussed that the duration of effective immunity induced by vaccination becomes shorter than before. If the immunity of primary vaccination is decaying, how effective is the secondary vaccination? In this work, we try to discuss theoretically this problem, making use of mathematical analysis for a basic Kermack-McKendrick type of mathematical model with the mass-action type of interaction between infectives and susceptibles. In our model, the population is classified into three age groups: Infant (Group 1), Young (Group 2) and Adult (Group 3). For each group, we have the susceptible subpopulation  $S_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), the infective one  $I_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), the recovered and immune one  $R_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), and the non-infected and immune/vaccinate one  $M_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) at time  $t$ . Especially  $M_1(t)$  denotes the immune subpopulation by the primary vaccination in the infant age. The subtotal population of each group is denoted by  $G_i = S_i + I_i + R_i + M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), and assumed to be temporally stationary, that is, constant independently of time. This assumption can be introduced into the model with some restrictive relations among parameters in the model. Results from mathematical analysis for the model and numerical calculations with demographic data about measles infectives of Kochi Prefecture indicate that the disease free equilibrium could be attainable only if the primary vaccination rate is beyond a threshold. Moreover, this is true for any secondary vaccination rate. Lastly it is emphasized that the primary vaccination plays the critical role for controlling the epidemic disease.

近年、麻疹の予防接種における有効免疫期間が縮まってきた可能性が指摘されている。ワクチン接種による免疫が終生免疫ではない場合、どのような追加接種が適切なのだろうか？本研究では免疫失活に対する追加ワクチン接種の効果について、基本的な Kermack-McKendrick タイプ、すなわち、未感染者と感染者間の相互作用の人口動態への効果を密度の積に比例するタイプの数理モデルを構築し、その解析を行った結果によって考察を試みる。本研究で構成した数理モデルでは人口集団を次の3つの年齢層グループに分ける：幼年層（グループ1）、少年層（グループ2）、成年層（グループ3）。各グループ内の時刻  $t$  における未感染者個体群サイズを  $S_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ )、感染者個体群サイズを  $I_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ )、一度感染し、抗体を獲得した免疫個体群サイズを  $R_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ )、各グループにおいて感染なく、有効免疫を獲得した（ワクチン被接種も含）免疫個体群サイズを  $M_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする。特に  $M_1$  は幼年期におけるワクチン接種による抗体獲得個体群サイズである。また、各グループ内の総個体群サイズを  $G_i = S_i + I_i + R_i + M_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とする。本研究の数理モデルの理論的解析と高知県の感染症患者数データを用いた数値計算により、伝染病駆逐平衡状態が実現され得るためには、ある閾値以上の一次接種率が必要であることが導かれた。また、どんな追加接種率に対しても、伝染病駆逐が可能になるには、ある閾値以上の一次接種が必要であること、すなわち、一次接種の重要性が確認された。

## 1 Introduction

Recently it is discussed that the duration of effective immunity induced by vaccination becomes shorter than before. If the immunity of primary vaccination is decaying, how effective is the secondary vaccination? In this work, we try to discuss theoretically this problem, making use of mathematical analysis for a basic Kermack-McKendrick type of mathematical model with the mass-action type of interaction between infectives and susceptibles. ....