

# 2002年3月

**1**  $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  を第1象限とすると、次の間に答えよ。

(1)  $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$  を計算せよ。

(2)  $m > 0$  とするとき  $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^m}$  の収束、発散を調べよ。

(3)  $m > 0$  とするとき  $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2y^2)^m}$  の収束、発散を調べよ。

**2**  $n$  を正の整数とし、 $n$  次以下の実数係数多項式全体のなすベクトル空間を

$$V = \{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}$$

とする。  $V$  から  $V$  への写像  $T$  を

$$T : f(x) \mapsto f(x) + f'(x)$$

で定める。  $f'(x)$  は  $f(x)$  の導関数である。

- (1)  $T$  は線形写像であることを示せ。
- (2)  $V$  の基底として  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$  をとるとき、 $T$  の表現行列を求めよ。
- (3)  $T$  は逆写像をもつことを示せ。
- (4)  $V$  の基底をどのようにとっても  $T$  の表現行列は対角行列にはならないことを示せ。

**3** 正の整数からなる狭義単調増加数列  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$  と、正の整数  $N$  に対して、 $a_n \leq N$  をみたす  $a_n$  の個数を  $A(N)$  とおく。

$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N)}{N}$  が存在するとき、これを  $A$  の密度といい、 $\rho(A)$  で表す。

- (1)  $d$  を正の整数とする。  $A$  が公差  $d$  の等差数列のとき、 $\rho(A) = \frac{1}{d}$  を証明せよ。
- (2) 実数  $0 < r < 1$  に対し、 $\rho(A) = r$  となる、正の整数からなる狭義単調増加数列  $A$  の例をあげよ。
- (3) 密度  $\rho(A)$  が存在しない  $A$  の例をあげよ。

**4** 実数  $\alpha$  は方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  の解である。

(1)  $a, b$  を有理数とする。行列の等式

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 + a\alpha + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 + a\alpha + b \end{pmatrix} A$$

が成り立つように、有理数を成分とする 3 次正方行列  $A$  を定めよ。

また  $A$  が対称行列となるように  $a, b$  を定めよ。

(2) (1) で求めた対称行列  $A$  の固有多項式  $f(\lambda)$  を求めよ。  $f(\alpha^2 - 2)$  の値を求め、  $A$  のすべての固有値を求めよ。

**5**  $\mathbb{Q}[x]$  を有理数係数多項式環とする。  $n$  を 2 以上の整数とし、多項式

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

の生成する  $\mathbb{Q}[x]$  の単項イデアルを  $I = (f(x))$ 、剰余環を  $R = \mathbb{Q}[x]/I$  とする。

(1) 多項式  $g(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}$  の剰余類が、  $R$  で逆元をもつための  $k$  の条件を求めよ。

(2)  $n$  が素数でないときは、  $R$  は体ではないことを示せ。

(3)  $n = 4$  のとき、  $R$  は 2 つの体の直和と同型になることを示せ。

(4)  $n = 15$  のとき、  $R$  は何個の体の直和と同型になるか。

**6**  $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$  上のリーマン計量を  $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\text{Im } z)^2}$  で定める。

ここで  $|dz|^2 = dzd\bar{z}$  である。次の問いに答えよ。

(1)  $SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det g = 1 \right\}$  の  $H^2$  への作用を

$$w = \tau_g z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

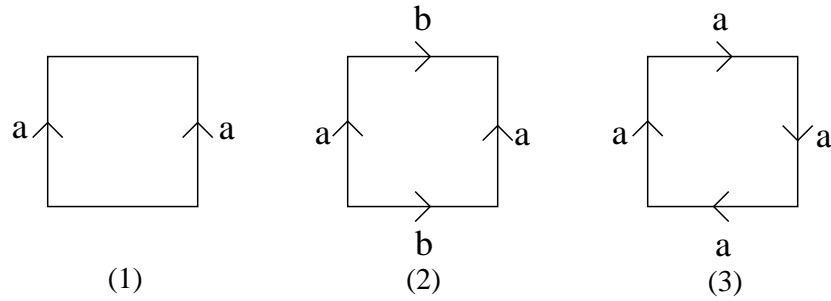
で定義する。このとき  $w = \tau_g z \in H^2$  であることを確かめよ。

(2) (1) の作用  $\tau_g$  が  $ds^2$  について等長変換であること、すなわち  $w = \tau_g z$  のとき

$$\frac{|dw|^2}{(\text{Im } w)^2} = \frac{|dz|^2}{(\text{Im } z)^2}$$

であることを示せ。

**7** 中身の詰まった正方形の境界の辺を、それぞれ以下の図のように矢印の向きに従って同一視して得られる空間の、整数係数1次元ホモロジー群を求めよ。ただし、同じ記号を持つ辺が、それぞれ同一視されるものとする。



**8**  $2 \times 2$  正定値エルミート行列  $A = (a_{ij})$  の固有値を、重複度もこめて  $\lambda_1, \lambda_2$  とする。

(1) ある  $2 \times 2$  ユニタリ行列  $U = (u_{ij})$  が存在して

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k |u_{kj}|^2, \quad j = 1, 2$$

となることを示せ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$a_{11} \log a_{11} + a_{22} \log a_{22} \leq \lambda_1 \log \lambda_1 + \lambda_2 \log \lambda_2$$

ただし、 $0 \log 0 = 0$  とする。

**9**  $D$  を  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の有界な閉凸部分集合とする。  
写像  $T: D \rightarrow D$  が

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in D$$

をみたすとき、以下の問に答えよ。ただし、 $\|\cdot\|$  はユークリッド空間のノルムである。

(1) 集合

$$A_n = \{T^n x \mid x \in D\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

は閉集合であることを示せ。

(2) (1) の集合  $A_n$  に対して、集合

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

は空でない連結な閉集合であることを示せ。

(3) (2) の集合  $M$  に対して、 $M = \{Tx \mid x \in M\}$  を示せ。

(4) (2) の集合  $M$  が 1 点集合でないとき、

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

をみたす異なる 2 点  $x, y \in M$  が存在することを示せ。

**10** (1)  $\phi$  を  $\mathbf{R}$  上の実数値  $C^1$ -級関数とし, 関数  $u$  を

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-t}^t \phi(x + s) ds$$

により定める。 $u$  は  $\mathbf{R}^2$  上の  $C^2$ -級関数であり, 次の方程式をみたすことを示せ。

$$(W1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \\ u(0, x) = 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

(2)  $\psi_0$  を  $\mathbf{R}$  上の実数値  $C^1$ -級関数で,  $\psi_0(-x) = \psi_0(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , をみたすものとする。 $v_0$  を  $\mathbf{R}^2$  上の実数値  $C^2$ -級関数で,  $v_0(t, -x) = v_0(t, x)$ ,  $\forall t, x \in \mathbf{R}$ , をみたすものとする。関数  $\phi$ ,  $u$ ,  $\psi$ ,  $v$  を次で定める。

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x\psi_0(x), & u(t, x) &= xv_0(t, x), & (t, x) &\in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, \\ \psi(y) &= \psi_0(|y|), & v(t, y) &= v_0(t, |y|), & (t, y) &\in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3. \end{aligned}$$

ただし,  $y = (y_1, y_2, y_3)$  に対し,  $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$  とする。

$(\phi, u)$  が (1) の方程式 (W1) をみたすならば,  $(\psi, v)$  は次の方程式をみたすことを示せ。

$$(W2) \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} = 0, & (t, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, \\ v(0, y) = 0, & \frac{\partial v}{\partial t}(0, y) = \psi(y) \end{cases}$$

(3)  $\psi_0, \psi$  を (2) で与えられるものとする。(W2) をみたす関数  $v$  を 1 つ構成せよ。

**11** 確率変数列  $X_1, X_2, \dots$  は独立であり, かつ  $\mathbf{P}(X_k = +1) = p, \mathbf{P}(X_k = -1) = q$  をみたすものとする。ただし,  $p, q$  は  $p > 0, q > 0, p + q = 1$  をみたす実数の組である。さらに,

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

とおく。

- (1)  $S_n$  の平均  $\mathbf{E}(S_n)$  と分散  $\mathbf{V}(S_n)$  を求めよ。
- (2)  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $\mathbf{P}(S_n = 0)$  を求めよ。
- (3)  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して,  $C_n \equiv \mathbf{P}(S_n = 0)$  によって定義される数列  $\{C_n\}$  の母関数を,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n$$

とする。  $f(t)$  の簡明な表示式を求めよ。必要なら一般化された二項展開の公式

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

を用いよ。