2003年3月

1 次の式で与えられる4次正方行列を $A=(a_{ij})$ とおく.

$$a_{ij}=\begin{cases} j & i \leq j \text{ のとき} \\ 0 & i > j \text{ のとき} \end{cases} \qquad (1 \leq i, j \leq 4)$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) 行列 A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(2) 行列 A^{-1} の固有値を求めよ.

(3) 行列 A^{-1} の最小の固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(4) $X=(x_{ij})$ を n 次正方行列で, 各要素が行列 A と同じように

$$x_{ij}=\begin{cases} j & i \leq j \text{ のとき} \\ 0 & i > j \text{ のとき} \end{cases} \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

で与えられているものとする. このとき, 行列 X の逆行列 X^{-1} の形を問(1)で導いた答より予想し, それが正しいことを示せ.

2 2次の実正方行列全体の作る線形空間を V とし,

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $\mathcal{M}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ が V の基底であることを示せ.

(2) V の元 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ の基底 $\mathcal{M}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ に関する成分を求めよ.

(3) 写像 $F: V \to V$ を

$$F\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & -x_{22} \end{pmatrix}$$

により定義する. この写像 F が線形写像であることを示せ.

(4) (3)の線形写像 F の基底 $\mathcal{M}=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ に関する行列表現を求めよ.

(5) (3)の線形写像 F は逆写像 F^{-1} をもつか. もつときは $F^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\right)$ を求めよ. もたないときは, F の核 $\ker F$ を求めよ.

3 $n=1,2,\dots$ に対して

$$a_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

とおくとき, 次の問に答えよ.

(1) a_1 と a_2 を求めよ.

(2) $a_n \geq \log 2$ を示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であることを示せ.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

4 5 つの要素からなる有限体 F_5 上で考える.

(1) 多項式 x^2+1 を F_5 上で因数分解せよ.

(2) 2 次式 x^2+ax+b $(a, b \in \mathrm{F}_5)$ が F_5 上で既約になるための (a, b) の条件を求めよ.

(3) (2) の条件をみたす (a, b) の集合を S とするとき

$$\prod_{(a,b)\in S}(x^2+ax+b) = \frac{x^{24}-1}{x^4-1}$$

を示せ.

5 $\boldsymbol{Q}$ を有理数体とし,

$$\alpha = \sqrt{(2+\sqrt{2})(5+\sqrt{5})}, \quad \beta = \sqrt{(2-\sqrt{2})(5+\sqrt{5})}$$

$$\gamma = \sqrt{(2+\sqrt{2})(5-\sqrt{5})}, \quad \delta = \sqrt{(2-\sqrt{2})(5-\sqrt{5})}$$

とおく. $\boldsymbol{Q}$ の 8 次拡大体 $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \alpha)$ について次の問に答えよ.

(1) $\beta/\alpha,\ \gamma/\alpha$ をそれぞれ $\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ および $\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ の元として表せ.
（2 重根号を用いずに表すこと.）

(2) $(\alpha+\delta)^2$ を計算し, $\sqrt{10+3\sqrt{10}} \in K$ であることを示せ.

(3) $K/\boldsymbol{Q}(\sqrt{5})$ および $K/\boldsymbol{Q}(\sqrt{2})$ はガロア拡大で, それらのガロア群はそれぞれ

$$\sigma(\alpha) = \beta, \qquad \tau(\alpha) = \gamma$$

を満たす K の自己同型 σ および τ によって生成される巡回群であることを示せ.
また, $\sigma\tau = \tau\sigma$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $M(3,\boldsymbol{R})$ を3次の実正方行列全体の集合とし, 9次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^9$ と自然に同一視した位相を与える. 次のような $M(3,\boldsymbol{R})$ の部分位相空間 G, M と写像 ϕ を考える.

$$G = \{X \in M(3,\boldsymbol{R}) \mid {}^tX = X^{-1},\ \det X = 1\},$$

$$M = \{A \in M(3,\boldsymbol{R}) \mid {}^tA = A,\ \mathrm{Trace}A = 0\},$$

$$\phi : G \times M \to M, \quad \phi(X,A) = XAX^{-1} \quad (X \in G,\ A \in M).$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) G は行列の積に関して, 位相群になることを示せ.

(2) 写像 ϕ は定義可能で, G の M への連続な作用を与えることを示せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ における等方部分群 G_A, G_B を求めよ. ただし $G_A = \{X \in G \mid \phi(X,A) = A\}$ を, A における等方部分群という.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 平面内の領域 D 上で定義された曲面 $M = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$ のガウス曲率 K は

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2}{(1 + {f_x}^2 + {f_y}^2)^2}$$

と計算されることが知られている. このことを用いて, 関数 $z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ により与えられる2次曲面 M 上の点 $P = (0,0,0)$ の周りの M の形状について論ぜよ. ただし a, b, c, は実数である.

$\boxed{\mathbf{8}}$

(a) $f(1) = 1$

(b) $f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (0 \le x,\ y < +\infty)$

という性質をもつ $[0,+\infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ はどのような形をしているか.

9 複素関数 $f(z)$ は次を満たすとする.

(a) $f(z)$ は上半平面 $\mathrm{Im}z \geq 0$ で有限個の極を除いて正則.

(b) $f(z)$ は原点 0 を１位の極とするほか実軸上に極を持たない.

(c) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

このとき, $g(z) = f(z)e^{imz}$ $(m > 0)$ とおく. $\mathit{\Gamma}(r)$ を中心 0, 半径 $r > 0$ の下の図のような半円とし, 向きは偏角の増加する方向にとる. また, $\mathrm{Res}(g, \alpha)$ は関数 g の点 α における留数を表わす.

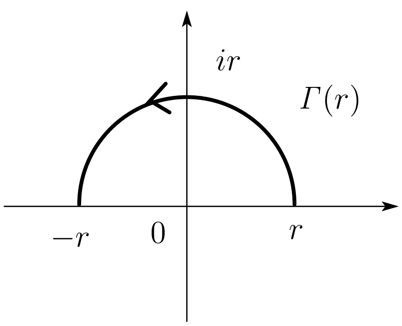
(1) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathit{\Gamma}(\varepsilon)} g(z)\,dz = \mathrm{Res}(g,0)\pi i$ を示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to +\infty}\int_{\mathit{\Gamma}(R)} g(z)\,dz = 0$ を示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right) g(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\alpha>0}\mathrm{Res}(g,\alpha) + \pi i\mathrm{Res}(g,0)$ を示せ.

ここで右辺の第１項の和は上半平面に含まれる $f(z)$ の極 α についてとる.

(4) 上の結果を利用して $\displaystyle\lim_{R\to+\infty,\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\sin x}{x}\,dx$ の値を求めよ.



10 2つの整数の添字 $j, k \in \boldsymbol{Z}$ をもつ複素数列 $(x_{j,k})$ で, $\displaystyle\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} |x_{j,k}|^2 < \infty$ をみたすものからなるヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とする. 各 $m \in \boldsymbol{Z}$ について $j \neq m$ ならば $x_{j,k} = 0$ となる数列 $(x_{j,k})$ からなる $\mathcal{H}$ の部分空間 $\mathcal{M}_m$ への射影作用素を P_m とし, S を第２の添字に関するシフト作用素, つまり, 数列 $(x_{j,k})$ を $y_{j,k} = x_{j,k-1}$ を満たす数列 $(y_{j,k})$ に変換する作用素とする. このとき, 作用素 U を $U = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m S^m$ と定義する.

(1) U はユニタリ作用素であることを示せ.

(2) $\mathcal{H}$ に属する数列 $(x_{j,k})$ を U で変換して得られる数列 $(z_{j,k})$ が

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} |x_{j,k}|^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |z_{j,j}|^2$$

を満たすような数列 $(x_{j,k})$ をすべて求めよ.

11 2次元ユークリッド空間における基底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定める. $X_1, X_2, \ldots$ を $\{e_1, e_2\}$ に値をとる独立な確率ベクトルの列で

$$P(X_n = e_1) = P(X_n = e_2) = \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

を満たすものとし,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

とおく. 次の問に答えよ.

(1) x_n は二項分布 $B(n, \frac{1}{2})$ に従う確率変数であることを示せ.

(2) 確率ベクトル S_n の平均 $M_n = \mathbf{E}(S_n)$ を計算せよ.

(3) $\mathbf{E}(\|S_n - M_n\|^2)$ を計算せよ. ただし, $\|a\|$ はユークリッドノルムであり,

$$\|a\|^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad a = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

によって定義される.