2006年8月

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ を計算し，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ.

(2) $\mathbf{R}$ 上の関数 f が $f(0)=1$ であり，すべての $x \geq 0$ に対して

$$f'(x) = e^{-(x^2+f(x))}$$

を満たすとする．このとき，$0 < f'(x) \leq e^{-x^2-1}$ がすべての $x \geq 0$ に対して成り立つことを示せ.

(3) (2) の f に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在し，2 より小さいことを示せ.

$\boxed{2}$

f を閉区間 $[0,1]$ で連続な関数とし,

$$f_0(x) = f(x), \quad f_n(x) = \int_x^1 f_{n-1}(t)dt \quad (\,0 \leq x \leq 1,\, n = 1,2,3,\cdots)$$

とおく．このとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ が $0 \leq x \leq 1$ で一様収束し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \int_x^1 e^{-(x-t)}f(t)dt \quad (\,0 \leq x \leq 1\,)$$

となることを示せ.

$\boxed{3}$

ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ において, ベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ は 1 次独立とする．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 4 つのベクトル

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d},\ \mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}$$

は 1 次独立か否かを判定せよ. また, 理由も書け.

(2) 4つのベクトル

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{d},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d},\ \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}$$

についてはどうか.

$\boxed{4}$

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ のトレースを，$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ により定義する. 以下の問に答えよ.

(1) A を複素数を成分とする 2 次正方行列とする．$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^2)=0$ ならば $A^2=O$ となることを示せ.

(2) A を複素数を成分とする 3 次正方行列とする．$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(A^3)=0$ ならば $A^3=O$ となることを示せ.

$\boxed{5}$

ある研究科には N 人の 1 年生が在籍し，M 個の講義「講義 1」,「講義 2」, ... ,「講義 M」が開講されている．どの学生もこれらの中から r 個の講義を受講しているとする.「講義 i」の受講生の数を k_i とするとき，以下の問に答えよ.

(1) $\sum_{i=1}^{M} k_i = rN$ が成り立つことを示せ.

(2) どの 2 人の学生も高々 s 個の共通の講義を受講しているならば,

$$\sum_{i=1}^{M} k_i^2 \leq sN(N-1)+rN$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) と同じ仮定の下で，講義 1 つあたりの受講生の平均人数を k 人としたとき,

$$k \leq \frac{s(N-1)}{r}+1$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$

A,B の 2 人が次のようなゲームをする．まず, A,B は勝負がつくまでじゃんけんをし, じゃんけんに勝った者はコインを 2 回投げ, 負けた者はコインを 1 回投げる．コインを 2 回投げる者は, 1 回投げるごとに, 表が出れば 5 点, 裏が出れば 0 点を獲得する．コインを 1 回投げる者は, 表が出れば 10 点, 裏が出れば 0 点を獲得する．このゲームに関して以下の問に答えよ.

(1) コインを 2 回投げるとき, 表の出る回数 Z の確率分布を求めよ.

(2) A さんの獲得する得点を X とするとき, X の確率分布を求め, その平均 $\mathbf{E}(X)$ と分散 $\mathbf{V}(X)$ を計算せよ.

(3) X は (2) で定めたものとし, Y を B さんの獲得する得点とする．X と Y の共分散 $\mathbf{Cov}\,(X,Y) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y)))$ を計算せよ.

(4) X と Y は独立であるか.

$\boxed{7}$

(1) ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 T が直交射影作用素（単に射影作用素ともいう）であることの定義を述べよ.

(2) $\mathbf{R}$ 上の複素数値連続関数 ϕ が

$$|\phi(x)|^2 + |\phi(-x)|^2 = 1 \quad (\, x \in \mathbf{R}\,)$$

を満たしているものとする．ヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線形作用素 T を

$$(Tf)(x) = \overline{\phi(x)}\{\phi(x)f(x) - \phi(-x)f(-x)\} \quad (\, f \in L^2(\mathbf{R})\,)$$

で定義する．T は射影作用素であることを示せ.

$\boxed{8}$

a, b を $[0,\infty)$ 上の連続関数, c を定数とする．以下の問に答えよ.

(1) 初期値問題

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x), \qquad \varphi(0) = c$$

を解け.

(2) 関数 f は微分方程式

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = a(x)f(x) + b(x) \quad (\, x > 0\,) \\
&f(0) = c
\end{aligned}
$$

を満たしているものとし, 関数 g を

$$
g(x) = f(x) \exp\left\{ -\int_0^x a(s)\, ds \right\} \quad (\, x \geq 0\,)
$$

によって定義する. g が満たす 1 階微分方程式を求め, その方程式を解くことにより, f を関数 a, b と定数 c で表せ.

$\boxed{9}$

実 2 次正方行列全体 $M(2, \mathbf{R})$ に, 4 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ からの自然な位相を与える. $M(2, \mathbf{R})$ の部分位相空間

$$
O(2) = \left\{\, X \in M(2, \mathbf{R}) \,|\, {}^tXX = X\,{}^tX = E \,\right\}
$$

に対して, 以下を示せ. ここで, ${}^tX$ は X の転置行列, E は単位行列を表す.

(1) $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon \sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbf{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\} \right\}$ が成り立つ.

(2) $O(2)$ は行列の積に関して群である.

(3) $O(2)$ はコンパクトである.

(4) $O(2)$ は 2 つの弧状連結成分をもつ.

$\boxed{10}$

p を素数とする. 有限体 $\mathbf{F}_{p^2}$, 整数環の剰余環 $\mathbf{Z}/(p^2)$, 有限体の直和 $\mathbf{F}_p \oplus \mathbf{F}_p$, 多項式環の剰余環 $\mathbf{F}_p[x]/(x^2)$ について, 以下の問に答えよ. ただし, (a) は a の生成するイデアルを表わす.

(1) これらの環は互いに同型でないことを示せ.

(2) R を p^2 個の元からなる, 乗法の単位元をもつ可換環とする. R は $\mathbf{F}_{p^2}$, $\mathbf{Z}/(p^2)$, $\mathbf{F}_p \oplus \mathbf{F}_p$, $\mathbf{F}_p[x]/(x^2)$ のいずれかに同型であることを示せ.