2007年2月

$\boxed{1}$

n 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ はベクトルの内積を表し，$|\boldsymbol{x}|$ はベクトル $\boldsymbol{x}$ の長さを表すとする．$\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の長さ 1 のベクトルとし，

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0\}$$

とおく．また，ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) H は部分空間であることを示せ．
(2) f は線形写像であることを示せ．
(3) すべての $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ について $|f(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{x}|$ を示せ．
(4) f の核 $\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$ と f の像 $\mathrm{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$ を求めよ．ここで，$\boldsymbol{o}$ は零ベクトルとする．

For two vectors $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ in the n-dimensional real vector space $\boldsymbol{R}^n$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ denotes the inner product and $|\boldsymbol{x}|$ denotes the length of the vector $\boldsymbol{x}$. Let $\boldsymbol{a}$ be a vector in $\boldsymbol{R}^n$ of unit length, and put

$$H = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0\}$$

Define, for $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})\boldsymbol{a}.$$

(1) Show that H is a subspace.
(2) Show that f is a linear mapping.
(3) Show that $|f(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{x}|$ holds for all $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$.
(4) Determine the kernel $\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}\}$ and the image $\mathrm{Im} f = \{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n\}$ of f, where $\boldsymbol{o}$ denotes the zero vector.

$\boxed{2}$

R を乗法の単位元 1 をもつ可換環, R の極大イデアル全体の共通部分を

$$J = \bigcap m \qquad (m \text{ は } R \text{ の極大イデアル全体を動く})$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(1) J は R のイデアルであることを示せ.
(2) $\alpha \in R$ が $\alpha = 1 + x$ $(x \in J)$ と表せるとき, R に α の逆元が存在することを示せ.
(3) $J = \{x|$ すべての $r \in R$ に対して $1 + rx$ は R に逆元をもつ $\}$ を示せ.
(4) $\beta \in R$ が, ある $x \in J$ に対し $\beta = x\beta$ をみたせば, $\beta = 0$ であることを示せ.
(5) $\beta_1, \beta_2 \in R$ が, ある $x_{ij} \in J$ $(i, j = 1, 2)$ に対し

$$\begin{cases} \beta_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 \\ \beta_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 \end{cases}$$

をみたせば, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ であることを示せ.

Let R be a commutative ring with identity. Let J be the intersection of all the maximal ideals of R:

$$J = \bigcap m \qquad (m \text{ runs over the set of all maximal ideals of } R).$$

(1) Show that J is an ideal of R.
(2) Suppose that $\alpha \in R$ satisfies $\alpha = 1 + x$ for some $x \in J$. Show that α has an inverse in R.
(3) Show $J = \{x \mid 1 + rx \text{ has an inverse in } R \text{ for all } r \in R\}$.
(4) Suppose that $\beta \in R$ satisfies $\beta = x\beta$ for some $x \in J$. Show $\beta = 0$.
(5) Suppose that $\beta_1, \beta_2 \in R$ satisfy

$$\begin{cases} \beta_1 = x_{11}\beta_1 + x_{12}\beta_2 \\ \beta_2 = x_{21}\beta_1 + x_{22}\beta_2 \end{cases}$$

for some $x_{ij} \in J$ $(i, j = 1, 2)$. Show $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

$\boxed{3}$

修士論文等で研究した数学のテーマを述べなさい．また，その中で特に興味を持った理論・定理等を述べ，その概略を説明しなさい．

Describe the research you have done for your masters thesis. Explain a theorem or a theory in which you were particularly interested among those in your thesis.