2009年8月

$\boxed{1}$ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定める.

(1) $f(x)$ の $x \neq 0$ での導関数を求めよ.

(2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) $f'(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ.

(4) $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $g(x)$ で $g''(x)$ が $x = 0$ で連続でない関数の例を与え，その事実を示せ.

$\boxed{2}$ α, β を正の定数，$D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ とする. D 上で定義された関数 $f(x, y) = x^\alpha y^\beta (1 - x - y)$ に対して次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.

(2) $f(x, y)$ の D における最大値を求めよ.

(3) $\beta = 1$ のとき，重積分

$$I = \iint_D f(x, y)\,dxdy$$

の値を α の式で表せ.

$\boxed{3}$ a, b, c を実数とする.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ の固有多項式を求めよ.

(2)　0 が A の固有値であるとき, その固有空間を求めよ.

$\boxed{4}$　W_1, W_2 をそれぞれ

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}\right\}$$

で張られるベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする.

(1) W_1, W_2 の次元と一組の基底をそれぞれ求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ の次元と一組の基底を求めよ.

$\boxed{5}$　n は 2 以上の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を正の整数からなる数列とする．$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して，

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i,$$
$$T_k = \sum_{i=1}^{k} a_{n+1-i}$$

とおく．このとき次の問いに答えよ．

(1) $S_n = 2n - 1$ を満たす数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であって, n より小さい任意の正の整数 k, l に対して $S_k \neq T_l$ となるようなものを挙げよ.

(2) $S_n \leq 2n - 2$ ならば，n より小さいある正の整数 k, l が存在して $S_k = T_l$ となることを示せ．

$\boxed{6}$　$a > 0$ を定数とする. R を $[0, a]$ 上の一様分布に従う確率変数, Θ を $[0, 2\pi]$ 上の一様分布に従う確率変数とし, R と Θ は独立であるとする. 2 つの確率変数 X, Y を

$$X = R\cos\Theta, \qquad Y = R\sin\Theta$$

で定義するとき, 次の問いに答えよ.

(1) X の平均値 $\mathbf{E}(X)$ と 分散 $\mathbf{V}(X)$ を求めよ.

(2) X と Y の共分散 $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y)))$ を求めよ.

(3) $\mathbf{Cov}(X^2, Y^2)$ を求め, X と Y が独立かどうかを述べよ.

$\boxed{7}$

(1) $g(z)$, $h(z)$ を $z = a$ の近傍における正則関数とし，$g(a) = g'(a) = 0$, $g''(a) \neq 0$ とするとき，$\dfrac{h(z)}{g(z)}$ の $z = a$ における留数は

$$\mathrm{Res}\left(\frac{h}{g}, a\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3g''(a)h'(a) - g'''(a)h(a)}{g''(a)^2}$$

によって与えられることを示せ.

(2) 有理型関数

$$f(z) = \frac{1}{z\left(5 + 2\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\right)^2}$$

の単位円板 $|z| < 1$ におけるすべての極およびその点における留数を求めよ.

(3) 定積分 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 + 4\cos\theta)^2}$ を求めよ.

$\boxed{8}$ 正の実数 a に対して

$$F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos x}{1 + a^2x^2}\, dx$$

と定める.

(1) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上の実数値連続関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は n について一様に有界であり，$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ に, $\mathbb{R}$ の任意の閉区間において一様収束するものとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(x)}{1 + x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1 + x^2}\, dx$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\lim_{n\to\infty} F(n)$ の値を求めよ.

(3) $\lim_{a\to+0} F(a)$ の値を求めよ.

$\boxed{9}$ $\mathbb{R}^2$ をユークリッド平面, S^1 を $\mathbb{R}^2$ における単位円周とし, $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする.

(1) 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 関係 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ を $(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ と定める. このとき, $\sim$ は同値関係になることを示せ.

(2) 同値類の集合 $\mathbb{R}^2/\sim$ に商位相を与えると, $S^1 \times S^1$ と同相になることを示せ.

$\boxed{10}$ p を素数とし, p のべき q に対し q 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}_q$ で表す. $a, b \in \mathbb{F}_p$ に対し $\alpha \in \mathbb{F}_{p^2}$ を 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0$$

の解とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) α^p も $x^2 + ax + b = 0$ をみたすことを示せ.

(2) $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ とする. $\alpha + \alpha^p = -a,\ \alpha^{p+1} = b$ が成り立つことを示せ.

(3) $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ とする. $c, d \in \mathbb{F}_p$ に対し, $(c\alpha + d)^{p+1}$ を a, b, c, d を用いて表せ.

(4) $i \in \mathbb{F}_{19^2}$ を $x^2 + 1 = 0$ の解とする. $(1 + 2i)^{21}$ を $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{F}_{19})$ の形で表せ.