2011年3月

$\boxed{1}$ 3 次元ユークリッド空間における曲面 $2xy+z^2=1$ 上の点 (x,y,z) と点 $(1,1,2)$ との最短距離を求めよ.

$\boxed{2}$ 非負整数 n に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$ とおく.

(1) 非負整数 n に対して，$I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ.

(2) 数列 $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ は単調減少列であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ $M(2;\mathbb{R})$ を 2 次実正方行列のつくるベクトル空間とする. $A \in M(2;\mathbb{R})$ に対して, 写像 $f : M(2;\mathbb{R}) \to M(2;\mathbb{R})$ を

$$f(X) = AX - XA \quad (X \in M(2;\mathbb{R}))$$

により定める.

(1) f は線形写像であることを示せ.

(2) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

とおくと, $\{E, E_1, E_2, E_3\}$ は $M(2;\mathbb{R})$ の基底であることを示せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき, f の (2) における基底に関する表現行列を求めよ.

$\boxed{4}$ 3 次正方行列 A を $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ で定める.

(1) A の固有値と固有ベクトルをすべて求めよ.

(2) 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ で $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}$ が存在するものをすべて求めよ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする.

(1) A, B を $\mathbb{Z}$ の有限部分集合とするとき，次の等式を示せ.

$$\max\{\min A, \min B\} = \min_{a\in A,\ b\in B} \Big(\max\{a,\ b\} \Big)$$

(2) n を正の整数，X を有限集合とする．各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，f_i を X から $\mathbb{Z}$ への写像とする．このとき，次の等式を示せ.

$$\max_{1\leq i\leq n} \Big(\min_{x\in X} f_i(x) \Big) = \min_{x_1,\ldots,x_n\in X} \Big(\max_{1\leq i\leq n} f_i(x_i) \Big)$$

$\boxed{6}$ i を虚数単位とし，複素平面上の有理型関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{3e^{iz} - e^{3iz} - 2}{z^3}$$

により定める．さらに，正数 R に対して半円周 $C_R : z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ 上の $f(z)$ の複素積分の値を I_R とする．すなわち，

$$I_R = \int_{C_R} f(z)dz$$

とする.

(1) $f(z)$ の $z = 0$ における極の位数および留数を求めよ.

(2) 極限 $\lim_{R\to 0+} I_R$ の値を求めよ.

(3) $R \to +\infty$ のとき，$I_R \to 0$ であることを示せ.

(4) 次の公式を示せ：

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$$

$\boxed{7}$ X をパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従う確率変数とする．すなわち,

$$P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, \qquad x > 0,$$

$$P(X \leq 0) = 0$$

が成り立つとする．X' を X と独立で同分布に従う確率変数として,

$$Y = X + X', \qquad Z = X - X'$$

とおく．

(1) X の平均値 $\mathbf{E}[X]$ と分散 $\mathbf{V}[X]$ を求めよ．

(2) Y, Z の共分散 $\mathbf{Cov}(Y, Z) = \mathbf{E}[(Y - \mathbf{E}[Y])(Z - \mathbf{E}[Z])]$ を求めよ．

(3) $t > 0$ とするとき, $P(Y \leq t,\, Z \leq t)$ を求めよ．

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ が

$$x'(t) = x(t)y(t) + x(t),\ \ y'(t) = -x(t)y(t) + y(t),\ \ x(0) = y(0) = 1$$

を満たすとする．

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$x(t) + y(t) = 2e^t$ が成り立つことを示せ．

(2) $u(t) = e^{-t}x(t)$ が満たす微分方程式を導き，$x(t)$, $y(t)$ を t の式で表せ．

$\boxed{9}$ (X, d) を空でないコンパクトな距離空間とする．写像 $f : X \to X$ が, 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ について

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

を満たすとする．

(1) f は連続であることを示せ.

(2) $x = f(x)$ を満たす点 $x \in X$ が存在することを示せ.

(3) (2) のような点 x はただ一つしか存在しないことを示せ.

$\boxed{10}$ 以下の性質をもつ有限群が存在するときは説明を付してその例を一つ挙げ, 存在しないときはその証明を与えよ.

(1) 巡回群でない可換群

(2) 位数が同じで同型でない 2 つの群

(3) 単位元以外の元の位数が 2 の非可換群

(4) 正規部分群でない指数 2 の部分群をもつ群