2013年3月

$\boxed{1}$ α を 0 でない実数とし，0 でない実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = \alpha$$

をみたすとする．

(1) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界であることを示せ．

(2) $\alpha = 1$ のとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示し，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{2}$

(1) 正定数 c に対して，関数 $f_c : (-\pi, \pi) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を

$$f_c(x) = \arctan(c \tan \tfrac{x}{2})$$

により定める．このとき，導関数 $f_c'(x)$ を $\cos x$ により表せ．

(2) 定数 $\alpha > 1$ に対して，次の等式を証明せよ．

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}.$$

(3) 定数 $\alpha > 1$ に対して，次の積分値を求めよ．

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(\alpha + \cos x)^2}.$$

$\boxed{3}$ $M_4(\mathbb{R})$ を 4 次実正方行列全体のなすベクトル空間とする．

(1) a, b を実数とするとき，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

の行列式 $|A|$ を求めよ．

(2) $M_4(\mathbb{R})$ の部分集合

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ |A| = 0 \right\}$$

が $M_4(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であるかどうかを，理由と共に答えよ．

(3) 次の 2 つの 4 次正方行列が $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ．

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 前問で与えられた行列 B_1, B_2 で張られる $M_4(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間に属する任意の行列 B について，$|B| \geq 0$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における通常の内積を $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で表すとし，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とする．$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i$ とし，

$$W = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f} = 0\}$$

とする．さらに，$\mathbb{R}^n$ の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，写像 $r_{\boldsymbol{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$r_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$$

で定義する．

(1) W が $\mathbb{R}^n$ の部分ベクトル空間であることを証明せよ．

(2) $r_{\boldsymbol{a}}$ が線形写像であることを証明せよ．

(3) $\{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1} - \boldsymbol{e}_n\}$ が W の基底となることを証明せよ．

(4) W に属する $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$r_{\boldsymbol{a}}(W) = W$ を証明せよ．

(5) $n = 4$ の場合に, W の基底 $\{\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4\}$ に関する $r_{\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3}$ の表現行列を求めよ．

$\boxed{5}$ n を正の整数とし，$F = \{0, 1\}$ とする．写像 $d : F^n \times F^n \to \mathbb{Z}$ を

$$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \Big|\{i \mid 1 \leq i \leq n,\ u_i \neq v_i\}\Big|$$

で定義する．ここで，$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in F^n$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in F^n$ であり, $|S|$ は有限集合 S の要素の個数を表す．さらに, $0 \leq k \leq n$ をみたす整数 k と $\boldsymbol{u} \in F^n$ に対して

$$N_k(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{v} \in F^n \mid d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k\}$$

とおく．

(1) k は $1 \leq k \leq n$ をみたす整数とし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F^n$ は $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k$ をみたすとするとき，$|N_{k-1}(\boldsymbol{u}) \cap N_1(\boldsymbol{v})|$ を求めよ．

(2) i, j は $0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq n$ をみたす整数とし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F^n$ とする．$d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k$ とするとき，$|N_i(\boldsymbol{u}) \cap N_j(\boldsymbol{v})|$ を求めよ．

(3) i, j は $0 \leq i < j \leq n$ をみたす整数とし，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F^n$ とする．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N_i(\boldsymbol{u}) \cap N_j(\boldsymbol{v})$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < 2j$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{6}$ 2 つの確率変数 X, Y の共分散は

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$$

で定義される．ただし，$\mathbf{E}[Z]$ は確率変数 Z の平均値を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 X, Y が独立であるとき，$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ となることを示せ．

(2) 確率変数 X, Y のとる値が 0 または 1 に限られているとする．このとき，$\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ であれば，X, Y は独立であることを示せ．

(3) 確率変数 X, Y のとる値が $-1, 0$ または 1 に限られているとし，$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = \mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ とする．このとき，X, Y は独立であるかどうかを理由と共に答えよ.

$\boxed{7}$ $\gamma(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする．微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma(t)x = 0$$

の解 $x = x(t)$ について以下の問いに答えよ．

(1) $\gamma(t)$ が非正値の定数関数のとき，条件 $x(0) = x(1) = 0$ を満たす解 $x(t)$ は恒等的に 0 であることを示せ．

(2) $\gamma(t)$ が正値の定数関数のとき，条件 $x(0) = x(1) = 0$ を満たす恒等的に 0 でない解 $x(t)$ を求めよ．

(3) $\gamma(t)$ が正値関数のとき，条件 $x(t+1) = 4x(t)$ を満たす解 $x(t)$ は $[0,1]$ において少なくとも 1 点で 0 になることを示せ．

$\boxed{8}$ 複素平面上の有理型関数

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4)(z^2-2z+10)}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) $f(z)$ のすべての極とその点における留数を求めよ．

(2) 正数 R に対し，C_R を半円周 $z = Re^{i\theta}$，$0 \leq \theta \leq \pi$ とする．複素積分

$$I_R = \int_{C_R} f(z)\, dz$$

は，$R \to +\infty$ のとき，0 に収束することを示せ．

(3) 定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4)(x^2-2x+10)}\, dx$$

の値を求めよ．

$\boxed{9}$ a, b, c, d を実数とし，$a < b$, $c < d$ とする．

(1) 開区間 (a,b) と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ．

(2) 閉区間 $[a, b]$ と $\mathbb{R}$ は同相でないことを示せ.

(3) 開区間 (a, b) と区間 $[c, d) = \{x \in \mathbb{R} \mid c \leq x < d\}$ は同相でないことを示せ.

$\boxed{10}$ G を有限群，A を G の正規部分群，z を G の位数 2 の元とし，次を満たすとする.

$$C_G(z) \cap A = \{e\}.$$

ただし，e は G の単位元であり，$C_G(z) = \{g \in G \mid gz = zg\}$ である.

(1) A の位数 $|A|$ が奇数であることを証明せよ.

(2) $\{x^z x^{-1} \mid x \in A\} = A$ を証明せよ. ただし，$x^z = z^{-1}xz$ とする.

(3) A がアーベル群であることを証明せよ.