2014年8月

$\boxed{1}$ 実定数 α に対して $f_\alpha(x) = x^\alpha \log x \ (x > 0)$ とおく．

(1) $y = f_{-2}(x)$ のグラフの概形を描け．ただし，x 軸との交点，極値，変曲点，$x \to 0$ における挙動，$x \to \infty$ における挙動も説明すること．

(2) $f_\alpha(x)$ の原始関数を求めよ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ が収束するための α の条件を求めよ．また，その条件の下でこの広義積分の値を計算せよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$$

の最大値と最小値，およびそれらを与える (x,y) をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ $M_4(\mathbb{R})$ を 4 次実正方行列全体のなすベクトル空間とし，次の行列 A, B, I, J を考える：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

実数 a, b, c に対し，行列 X を $X = a(A + {}^tA) + bI + cJ$ で定める．ただし，${}^tA$ は A の転置行列を表す．

(1) 対称行列 $A + {}^tA$ の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^4$ の基底を一組求めよ．

(2) $M_4(\mathbb{R})$ の部分集合

$$W = \{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid AM = MA,\ BM = MB\}$$

は $M_4(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(3) 行列 X は W に含まれることを示せ．

(4) (1) で求めた $\mathbb{R}^4$ の基底に関する X の表現行列を求めよ．

$\boxed{4}$ 一人の祖先から始まるある家系の継承と絶滅についての以下のような数理モデルを考える．祖先が得る継承者を第 1 世代，第 1 世代の得る継承者を第 2 世代と呼び，同様

に，第 k 世代を定義する．家系の各メンバーが得る継承者数はそれぞれ独立に定まり，継承者を n 人得る確率を $p_n = (1-a)a^n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）とする．ただし，a は $0 < a < 1$ をみたす定数とする．第 k 世代の得る継承者総数が 0 であるとき，この家系は第 k 世代で絶滅したという．第 j 世代までに家系が絶滅する確率を d_j と表す．

(1) 祖先（第 0 世代）で絶滅する確率 d_0 を求めよ．

(2) 次の関係式が成り立つことを説明せよ．

$$(*) \qquad d_{j+1} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot {d_j}^n \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

(3) 関係式 $(*)$ を用いて，数列 $\{d_j\}$ が狭義単調増加であることを示せ．

(4) いつかは家系が絶滅する確率 $d = \lim_{j \to \infty} d_j$ を求めよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を 2 つの元からなる体とする．n を自然数とし，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_2^n$ に対して

$$\mathrm{wt}(\mathbf{x}) = \bigl|\{i \mid 1 \le i \le n,\ x_i \ne 0\}\bigr|$$

とする．ただし $|S|$ は有限集合 S の元の個数を表す．$\mathbb{F}_2$ 上のベクトル空間 $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間 C に対して

$$C^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \mid \text{任意の}\, \mathbf{y} \in C \,\text{に対して}\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$$

とする．ただし $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}_2^n$ とするとき

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

である．

(1) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$ に対して

$$\mathrm{wt}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathrm{wt}(\mathbf{x}) + \mathrm{wt}(\mathbf{y}) - 2(\mathbf{x} * \mathbf{y})$$

が成り立つことを示せ．ただし $\mathbf{x} * \mathbf{y} = \bigl|\{i \mid 1 \le i \le n,\ x_i = y_i = 1\}\bigr|$ である．

(2) C を $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間とする．C が条件

($\sharp$) C のすべての元 $\mathbf{x}$ に対して $\mathrm{wt}(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod 4$ が成り立つ

を満たすとき，$C \subset C^{\perp}$ となることを示せ．

(3) $n = 4$ のとき，$C \subset C^{\perp}$ となるが ($\sharp$) を満たさない C の例を１つ挙げよ．

$\boxed{6}$ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従う独立同分布な確率変数列とし，$M = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とおく．

(1) M の分布関数 $F_M(x) = P(M \leq x)$ を求めよ．

(2) M の確率密度関数 $f_M(x)$ を求めよ．

(3) M の平均値と分散を求めよ．

$\boxed{7}$ e を自然対数の底，i を虚数単位とする．複素平面上の有理型関数 f を

$$f(z) = \frac{ze^z}{1+e^{4z}}$$

で定める．

(1) 帯状領域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$ における f の極とその留数をすべて求めよ．

(2) 実数 a に対して積分

$$I(a) = \int_0^{\pi} f(a+iy)\, dy$$

を考える．$a \to +\infty$ または $a \to -\infty$ のとき，$I(a) \to 0$ であることを示せ．

(3) 次の式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^4}\, dt = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

$\boxed{8}$ 開区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上の実数値 C^2 級関数 $y = y(x)$ に関する微分方程式

$$y'' + 2(\tan x)y' - y = 0$$

を考える．$y_j = y_j(x)$ $(j = 1, 2)$ をそれぞれ初期条件

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0; \quad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1$$

を満たす解とし，関数 $w = w(x)$ を

$$w = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

で定める．

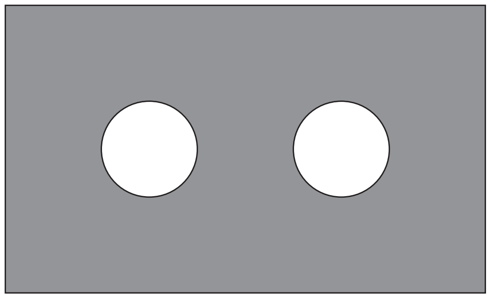
(1) w が満たす微分方程式を導き，w を求めよ．

(2) $y_2(x) = \sin x$ であることを示せ．

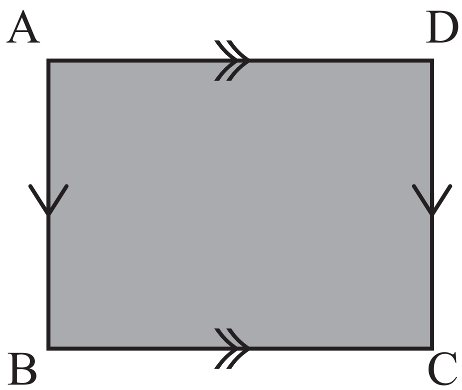
(3) $y_1(x)$ を求めよ．

(4) 初期値問題 $y'' + 2(\tan x)y' - y = \cos^2 x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ を解け．

9 　次の灰色の領域で示された平面図形を X とする．



ただし，境界はすべて含むものとする．また，次の灰色の領域で示された平面図形の境界 AB と DC，AD と BC を，矢印が一致するように貼り合わせて得られる図形を Y とする．



ただし，境界はすべて含むものとする．また，これらの平面図形には平面 $\mathbb{R}^2$ から定まる相対位相を入れるものとする．

(1) X と Y のホモロジー群 $H_i(X)$ と $H_i(Y)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ をそれぞれ求めよ．

(2) X と Y は同相でないことを示せ．

(3) I を閉区間 $[0, 1]$ とおく．$X \times I$ と $Y \times I$ は同相であることを示せ．

10 　p を素数，n を正の整数とする．G を位数 p^n の群とし，

$$Z(G) = \{b \in G \mid \text{ 任意の } c \in G \text{ に対して } bc = cb\}$$

とする．$a \in G$ に対し，G の部分集合 a^G と $C_G(a)$ を

$$a^G = \{bab^{-1} \mid b \in G\}, \qquad C_G(a) = \{b \in G \mid ba = ab\}$$

で定める．なお，以下では $|S|$ は有限集合 S の元の個数を表す．

(1) $Z(G)$ と $C_G(a)$ が G の部分群であることを示せ．

(2) 以下の 2 つの条件 (i) と (ii) が同値であることを示せ．

(i) $|G/C_G(a)| = 1$

(ii) $a \in Z(G)$

ただし，$G/C_G(a)$ は $C_G(a)$ による G の剰余類全体の集合を表す.

(3) 写像 $\psi : G \to a^G$ を $\psi(b) = bab^{-1}$ で定める．ψ は $G/C_G(a)$ から a^G への全単射を誘導することを示せ.

(4) $|Z(G)| > 1$ を示せ.