2015年3月

$\boxed{1}$

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

ただし，e は自然対数の底とする.

(2) 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D x\, e^{-x^2-2xy-2y^2}\, dxdy$$

ただし， $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ とする.

$\boxed{2}$ xy 平面内の曲線 C を $x^4 + y^4 - 4xy = 0$ で定める.

(1) 曲線 C が集合 $\{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \mid x \leq 0,\ y \leq 0\}$ に含まれることを示せ.

(2) 曲線 C が集合 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ に含まれることを示せ.

(3) 曲線 C 上のすべての点 (x,y) に対して $|y| \leq R$ を満たす定数 R の最小値を求めよ.

$\boxed{3}$ 次の行列 A と多項式 $f(x)$ を考える：

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + c$$

ただし，c は実数とする.

(1) 行列 $f(A)$ の固有値を c を用いて表せ.

(2) 行列 $f(A)$ が正則になるための c に関する必要十分条件を求めよ.

(3) $c = 0$ とする．自然数 n に対して $f(A)^n$ を求めよ.

4 次の常微分方程式系は，感染症の伝染ダイナミクスを表す最も基本的な数理モデルの一つである：

$$(*)\qquad \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -aSI \\ \frac{dI}{dt} &= aSI - rI \\ \frac{dR}{dt} &= rI \end{aligned}$$

ただし，a, r を正定数とし，初期条件が $S(0) > 0,\ I(0) > 0,\ R(0) = 0$ を満たすとする．

(1) 数理モデル $(*)$ において，S は未感染者（感染症に感受性をもつ個体）数密度，I は感染者（感染症に罹患し，感染力をもつ個体）数密度である．R の意味について，可能な解釈を一つ述べよ．

(2) 次の式で定義される量 $V(S,I)$ が時刻 t によらない定数であることを示し，系 $(*)$ の (S,I)–平面における解軌道の概図を描け．

$$V(S,I) = S + I - \frac{r}{a}\log S$$

(3) 感染者数密度の時間変動 $I(t)$ がピークをもつことを流行が生じたというとき，系 $(*)$ による感染症の伝染ダイナミクスが流行を生じさせる条件について述べよ．

(4) 系 $(*)$ において，定数 a を次の条件を満たす I の関数 $a = a(I)$ に置き換える：$a(I) > 0$, $a'(I) < 0$．このことはどのような仮定を数理モデルに新たに導入したものと解釈できるか述べよ．

5 A を，2つの有限集合 X, Y の直積 $X \times Y$ の部分集合とする．また，すべての $x \in X$ に対して

$$\bigl|\{y \in Y \mid (x,y) \in A\}\bigr|$$

は定数 r に等しく，すべての $y \in Y$ に対して

$$\bigl|\{x \in X \mid (x,y) \in A\}\bigr|$$

は定数 s に等しいものとする．さらに，任意の2つの異なる元 $x, x' \in X$ に対して，唯一の元 $y \in Y$ が存在して，$(x,y) \in A$ かつ $(x',y) \in A$ を満たすとする．ただし，有限集合 S の元の個数を $\bigl|S\bigr|$ で表す．

(1) $r\bigl|X\bigr| = s\bigl|Y\bigr|$ が成り立つことを示せ．

(2) $\bigl|X\bigr| - 1 = r(s-1)$ が成り立つことを示せ．

(3) X の部分集合 X_1，Y の分割 $Y = Y_1 \cup Y_2$ および2つの異なる整数 s_1, s_2 が存在して

$$y \in Y_i \implies \bigl|\{x \in X_1 \mid (x,y) \in A\}\bigr| = s_i \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つと仮定する．このとき，$\bigl|\{y \in Y_1 \mid (x_1, y) \in A\}\bigr|$ は $x_1 \in X_1$ によらない定数であることを示せ.

6

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従う確率変数とし，これらは独立であるとする．これらのうち最大のものを L，最小のものを S とする：

$$L = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \qquad S = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

(1) 確率変数 L の分布関数 $F_L(x) = P(L \leq x)$ と密度関数 $f_L(x)$ を求めよ.

(2) 確率変数 L の平均値と分散を求めよ.

(3) 確率変数 S, L の同時密度関数 $f_{SL}(x, y)$ を求めよ.

(4) 確率変数 S, L の相関係数を求めよ.

7

複素平面上の有理型関数 f を

$$f(z) = \frac{z^2}{5 + 2(z + z^{-1})}$$

によって定義する.

(1) 複素平面における f の極とその留数をすべて求めよ.

(2) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$$

8

$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^2 級関数 $y = y(x)$ が初期値問題

$$(2 + x^2)y'' - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

の解であるとする.

(1) $y(x)$ は奇関数であることを示せ.

(2) $y(x)$ が $x = 0$ のある近傍において，べき級数 $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ で与えられるとき，係数 $\{a_n\}$ が満たす関係式を求めよ.

(3) (2) のべき級数の収束半径を求めよ．

$\boxed{9}$ (S_1, d_1), (S_2, d_2) を距離空間とする．ただし，d_1, d_2 はそれぞれ S_1, S_2 の距離である．また，$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ をそれぞれの距離が定める S_1, S_2 の位相（開集合系）とする．直積集合 $S_1 \times S_2$ 上の距離 d を

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

で定義し，$S_1 \times S_2$ に d の定める位相 $\mathcal{O}$ を入れる．このとき，位相 $\mathcal{O}$ は，$\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の直積位相 $\mathcal{O}_{12}$ と一致することを示せ．ただし，直積位相とは $\{U_1 \times U_2 \mid U_1 \in \mathcal{O}_1, U_2 \in \mathcal{O}_2\}$ を基とする開集合系の定める位相である．

$\boxed{10}$ G を群とする．$a, b \in G$ に対して，$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ とする．G の部分集合 $\{[a, b] \mid a, b \in G\}$ で生成される G の部分群を $[G, G]$ で表す．

(1) $g, x, y \in G$ に対して，$g^{-1}[x, y]g = [s, t]$ を満たす $s, t \in G$ の組を一つ求めよ．

(2) $[G, G]$ が G の正規部分群であることを示せ．

(3) 剰余群 $G/[G, G]$ がアーベル群となることを示せ．

(4) N を G の正規部分群とする．剰余群 G/N がアーベル群であることと，$[G, G] \subset N$ が同値であることを示せ．