２００９年度　大阪大学数学教室　集中講義（１１月３０日ー１２月４日）レポート問題

藤原耕二

次の１～４のうち３問選んで解答せよ（問題の意味がわからないなどは、メールで質問してください fujiwara@math.is.tohoku.ac.jp ）。成績とは関係ないですが、授業の感想や意見、質問なども書いてください。

１．双曲平面の半径 r の円の円周の長さは $2\pi \sinh r$ であることは講義で述べた。
これを計算で示せ。

２．Xをδ双曲空間とする。γを測地線とする。
（１）PをXの点とする。Pとγの距離を実現するγの点があることは講義で述べたが、一点とは限らない。A,Bをγのそのような点とする。つまり $d(P,A)=d(P,B)=d(P,\gamma)$ である。このとき、$d(A,B) \leqq 10\delta$ を示せ。
（２）QをXの点として、Qとγの距離を実現する点の一つをCとする。
このとき、測地線[P,Q]は、三つの測地線の和[P,A] U [A,C]U[C,Q]の１０δ近傍に含まれることを示せ。

３．上半平面モデルで双曲平面Hを考えた時、y 軸の正の部分Lは測地線であることは講義で述べた。Lに関してHの右側半分をKとする。つまり
$K=\{(x,y) \mid x \geqq 0, y>0\}$.　LはKの境界と考えられる。
双曲平面Hに、Lにそって（もう一枚）Kを貼り付けてできる測地空間をXとする。
X はδ双曲的であることを示せ。

４．G を双曲群とし、ある生成元集合 S に関するケイレイグラフをΓとし、それがδ双曲的とする。
$\alpha:(-\infty, \infty) \to \Gamma$ をΓの両側無限な測地線とする。α1 を α(t)で、$t \geqq 0$ の部分からなる片側無限な測地線、α2 を α(t)で、$t \leqq 0$ の部分からなる片側無限な測地線とする。
G の位数無限の元 a が α を不変にするとする。
G の元 g について、g(α１)、g(α２）はそれぞれ片側無限な測地線であるが、
g（α1）～α1 が成立するとき、g（α2）～α2 を示せ。

講義で述べたように、ふたつの片側無限な測地線βとγについて、ある定数 C が存在して、一方が他方の C 近傍に含まれる時、β～γとする。
（ヒント：ある n,m>0 が存在して、$ga^ng^{-1}=a^m$ を示す。ただし、a^n は a の n 乗である。G のΓへの作用がプロパーであることに注意）
以上