

連結和の崩壊と Laplacian の固有値の収束

東大数理 高橋淳也

1 序章

コンパクト Riemann 多様体の崩壊において、関数に作用する Laplacian の固有値の振る舞いは良く研究されている。例えば、Fukaya により、断面曲率の上下と直径を上から押さえた Riemann 多様体の族において、measured Gromov-Hausdorff 収束の下で、各固有値が極限空間の固有値に収束することが示された [F-87]。これ以後多くの結果が発展し、最近では Shioya により、曲率が下に有界な Alexandrov 空間の族において、Gromov-Hausdorff 収束の下で同様の結果が成立することが示された [S-01]。

しかし、曲率の有界性を仮定しないと、一般に固有値の収束は成立しない。ところが、曲率が有界でない場合でも、興味深い固有値の収束の結果が知られている。例えば、Chavel-Feldman のハンドルの崩壊や、Anné による鉄亜鈴の崩壊の結果がある。

我々は連結和の崩壊、すなわち、2つの多様体の連結和の一方を一様に1点に潰した場合の固有値の収束問題を、Anné と Colbois による方法 [A-87], [AC-95] をもとに研究した。

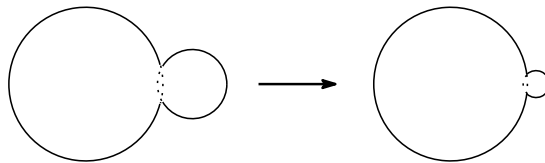


図 1: 連結和の崩壊 (M, g_ε)

その崩壊を記述しよう。 (M_i, g_i) , $i = 1, 2$, を同じ次元 m ($m \geq 2$) の連結、向き付け可能な、閉 Riemann 多様体とする。そして、各計量がある点 $x_i \in M_i$ の半径 r_i の測地的 ball $B_i(r_i)$ において Euclid 的になっているとする。この仮定は技術的に簡略化するためのもので、取り除くことができる。さらに、 (M_2, g_2) を潰す多様体とするので、計量のスケールを変えることで $r_2 > 1$ としてよい。今、 $(M_i(r), g_i) := (M_i, g_i) \setminus B_i(r)$ と書くとき、2つの境界付き多様体 $(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2(1), \varepsilon^2 g_2)$ の境界は等長的であり、その等長写像を Φ_ε とする。さらに、 g_2 を境界の近傍で少し変形することで、それらを張り合わせて得られる多様体 $(M, g_\varepsilon) := (M_1(\varepsilon), g_1) \cup_{\Phi_\varepsilon} (M_2(1), \varepsilon^2 g_2)$ は向き付けられた C^∞ 級の Riemann 多様体となる。

(M, g_ε) の Laplacian の固有値を

$$0 = \lambda_0(M, g_\varepsilon) < \lambda_1(M, g_\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_k(M, g_\varepsilon) \leq \cdots$$

と書き, (M_1, g_1) についても同様の記法を用いる.

この時, 次の収束定理が成立する.

定理 1.1 (収束定理 [T-01b]). すべての $k = 0, 1, \dots$, に対して, 以下の固有値の収束が成立する.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(M, g_\varepsilon) = \lambda_k(M_1, g_1).$$

証明から対応する固有関数の収束も言える.

なお, 極限空間が同じでも, 潰し方によって固有値の極限が異なることに注意したい [F-87]. 我々の収束定理は, 一様に潰すことで完全に残りの多様体の固有値に収束することを示している.

以下, 定理 1.1 の証明を行う. まず, 2 章で準備を行い, 3 章では固有値の上からの評価を, そして, 4 章では下からの評価を示す.

次に, この崩壊における微分形式に作用する Laplacian の固有値の場合を考察したい. 現段階では, まだ収束定理には至っていないが, 固有値の上からの評価は得ることができた.

(M, g_ε) の p -form に作用する Laplacian の固有値を

$$0 \leq \bar{\lambda}_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \bar{\lambda}_2^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \cdots \leq \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \cdots,$$

と書き, そして, 正の固有値を

$$0 < \lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_2^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \cdots \leq \lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \cdots,$$

と書く. 両者の関係は, $b_p(M)$ を M の p 次の Betti 数としたとき, $\bar{\lambda}_{k+b_p(M)}^{(p)}(M, g_\varepsilon) = \lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon)$ ($k \geq 1$) である.

定理 1.2.

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \begin{cases} 0 & \text{for } k = 1, \dots, b_p(M), \\ \lambda_{k-b_p(M)}^{(p)}(M_1, g_1) & \text{for } k \geq b_p(M) + 1. \end{cases}$$

定理 1.2 の証明を 5 章で行い, 一つの応用として, 関数と 1-form の固有値の gap 問題 [T-01a] の定理 1.2 において, 1 次の Betti 数の仮定が外せることを最後の 6 章で述べる. 今後の課題は下からの評価を示し, 微分形式の場合の固有値の収束定理を完成することである.

2 Sobolev 空間と Laplacian

この章では, (M, g_ε) 上の解析を $(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2(1), \varepsilon^2 g_2)$ の別々に議論するため, Anné と Colbois によって導入された Sobolev 空間と Laplacian を復習する [A-87], [AC-95].

まず, (M, g_ε) 上の L^2 空間を次で定める.

定義 2.1.

$$L^2(M, g_\varepsilon) := L^2(M_1(\varepsilon), g_1) \times L^2(M_2(1), \varepsilon^2 g_2).$$

次に, (M, g_ε) 上の Sobolev 空間 H^1 と H^2 を定めるために, $(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2(1), \varepsilon^2 g_2)$ の境界にある貼り付け条件を課す. ここで, 境界値は trace 作用素の意味で取る (例えば, [RR-92] を参照).

定義 2.2.

$$\begin{aligned} H^1(M, g_\varepsilon) &:= \{f = (f_1, f_2) \in H^1(M_1(\varepsilon), g_1) \times H^1(M_2(1), \varepsilon^2 g_2) \mid \\ &\quad f_1 \upharpoonright_{\partial M_1(\varepsilon)} = f_2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)} \circ \Phi_\varepsilon \text{ in } L^2(\partial M_1(\varepsilon), \partial g_1)\}. \\ H^2(M, g_\varepsilon) &:= \{f = (f_1, f_2) \in H^2(M_1(\varepsilon), g_1) \times H^2(M_2(1), \varepsilon^2 g_2) \mid \\ &\quad f_1 \upharpoonright_{\partial M_1(\varepsilon)} = f_2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)} \circ \Phi_\varepsilon \text{ in } H^1(\partial M_1(\varepsilon), \partial g_1), \\ &\quad \nu_1(f_1) \upharpoonright_{\partial M_1(\varepsilon)} = -\varepsilon^{-1} \nu_2(f_2) \upharpoonright_{\partial M_2(1)} \circ \Phi_\varepsilon \\ &\quad \text{in } L^2(\partial M_1(\varepsilon), \partial g_1)\}. \end{aligned}$$

ただし, ∂g_i は境界に自然に引き起こされる計量であり, ν_1 と ν_2 は, それぞれ $(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2(1), g_2)$ の境界上に沿った外向き単位法ベクトル場である.

以上, ここで導入した空間の内積は, $(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2(1), \varepsilon^2 g_2)$ の空間の内積の直和内積とする.

次に, (M, g_ε) 上の 2 次形式 Q_ε と, Laplacian Δ_ε を定める.

定義 2.3. 各 $f = (f_1, f_2) \in \text{Dom}(\Delta_\varepsilon) := H^2(M, g_\varepsilon)$ に対し, (M, g_ε) 上の Laplacian Δ_ε を

$$\Delta_\varepsilon(f_1, f_2) := (\Delta_{g_1} f_1, \Delta_{\varepsilon^2 g_2} f_2)$$

で定める. ここに, Δ_g は計量 g に対する通常の Laplacian である.

定義 2.4. 2 次形式 q_{g_1} , q_{g_2} を

$$\begin{aligned} q_{g_1}(f_1, h_1) &:= \int_{M_1(\varepsilon)} \langle df_1, dh_1 \rangle_{g_1} d\mu_{g_1} \quad (f_1, h_1 \in H^1(M_1(\varepsilon), g_1)), \\ q_{g_2}(f_2, h_2) &:= \int_{M_2(1)} \langle df_2, dh_2 \rangle_{g_2} d\mu_{g_2} \quad (f_2, h_2 \in H^1(M_2(1), g_2)) \end{aligned}$$

で定め、また $\text{Dom}(Q_\varepsilon) := H^1(M, g_\varepsilon)$ 上の 2 次形式 Q_ε を、

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(f, h) &:= q_{g_1}(f_1, h_1) + q_{\varepsilon^2 g_2}(f_2, h_2) \\ &= \int_{M_1(\varepsilon)} \langle df_1, dh_1 \rangle_{g_1} d\mu_{g_1} + \varepsilon^{m-2} \int_{M_2(1)} \langle df_2, dh_2 \rangle_{g_2} d\mu_{g_2}, \end{aligned}$$

$(f = (f_1, f_2), h = (h_1, h_2) \in \text{Dom}(Q_\varepsilon))$ で定める。

補題 2.5. 2 次形式 Q_ε は Laplacian Δ_ε に引き起こされる、すなわち、 $f = (f_1, f_2) \in \text{Dom}(\Delta_\varepsilon)$ と $h = (h_1, h_2) \in \text{Dom}(Q_\varepsilon)$ に対して、

$$Q_\varepsilon(f, h) = (\Delta_\varepsilon f, h)_{L^2(M, g_\varepsilon)}.$$

証明はそれぞれの部分で Stokes の定理を実行する。その際、境界の積分の項が生じるが、貼り付け条件よりお互いにキャンセルする。

ここで定義した Laplacian は (M, g_ε) の通常の Laplacian の性質を満たし、両者の固有値は一致する。

なお、微分形式の場合も同様の考え方で Sobolev 空間と Laplacian を定義するが、貼り付け条件は複雑である。ここでは特別必要ないので省略する。

3 定理 1.1 の証明, I

この節では、上からの評価 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_k(M_1, g_1)$ の証明を min-max 原理を用いて行う。まず、ここで用いる min-max 原理は次のタイプである。

補題 3.1 (min-max 原理).

$$\lambda_k(M, g_\varepsilon) = \inf_{E_\varepsilon \subset H^1(M, g_\varepsilon)} \sup_{u_\varepsilon \neq 0 \in E_\varepsilon} \left\{ \frac{q_{g_1}(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_1(\varepsilon), g_1)}^2} \right\}.$$

ここに、 E_ε は $H^1(M, g_\varepsilon)$ の $(k+1)$ 次元部分空間を亘る。ちなみに、 k でなく $(k+1)$ 次元部分空間となるのは、固有値の番号を 0 から数えているためである。

f_i ($i = 0, 1, \dots, k$) を固有値 $\lambda_i(M_1, g_1)$ に対応する固有関数で、互いに L^2 内積に関して正規直交となるものとする。今、cut-off function χ_ε を次のように定める。

$$\chi_\varepsilon(r) := \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq \varepsilon), \\ -\frac{2}{\log \varepsilon} \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) & (\varepsilon \leq r \leq \sqrt{\varepsilon}), \\ 1 & (\sqrt{\varepsilon} \leq r). \end{cases}$$

ただし、 r は $x_1 \in M_1$ からの距離である。この cut-off function は Courtois [Ct-87] によって構成された。

この時, E_ε を $\{\chi_\varepsilon f_0, \dots, \chi_\varepsilon f_k\}$ によって生成される部分空間とすると, 0 拡張により $H^1(M, g_\varepsilon)$ の部分空間になる. 補題 3.1 から,

$$\lambda_k(M, g_\varepsilon) \leq \sup_{u_\varepsilon \neq 0 \in E_\varepsilon} \left\{ \frac{q_{g_1}(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{L^2(M_1(\varepsilon), g_1)}^2} \right\} \quad (3.1)$$

である. $m \geq 2$ なので,

$$\int_{B(x_1, \sqrt{\varepsilon})} |d\chi_\varepsilon|_{g_1}^2 d\mu_{g_1} = \frac{4 \operatorname{vol}(S^{m-1}(1))}{(\log \varepsilon)^2} \int_\varepsilon^{\sqrt{\varepsilon}} r^{m-3} dr \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

である. このことを用いて (3.1) の右辺を計算すると,

$$\lambda_k(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_k(M_1, g_1) + \delta(\varepsilon)$$

を得る. ただし, $\delta(\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ の時 $\rightarrow 0$ となる項である. \square

4 定理 1.1 の証明, II

この章では, 下からの評価 $\lambda_k(M_1, g_1) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k(M, g_\varepsilon) =: \alpha_k$ の証明を行う. なお, この章では C で添字や関数によらない正の定数を表わすことにする.

$f_{j,\varepsilon} = (f_{j,\varepsilon}^1, f_{j,\varepsilon}^2) \in \operatorname{Dom}(Q_\varepsilon)$ ($j = 0, 1, \dots, k$) を固有値 $\lambda_j(M, g_\varepsilon)$ に関する正規直交的な固有関数とする. 我々は $f_{j,\varepsilon}$ から (M_1, g_1) の固有関数を構成したい.

まず, $f_{j,\varepsilon}^1$ の調和関数としての拡張 $\bar{f}_{j,\varepsilon}^1 \in H^1(M_1, g_1)$ が存在し, 次の評価式が成立する ([RT-75]):

$$\|\bar{f}_{j,\varepsilon}^1\|_{H^1(M_1, g_1)} \leq C \|f_{j,\varepsilon}^1\|_{H^1(M_1(\varepsilon), g_1)}. \quad (4.1)$$

すると, 3 章の固有値の上への有界性から, 族 $\{\bar{f}_{j,\varepsilon}^1\}_{\varepsilon > 0}$ は $H^1(M_1, g_1)$ ノルムに関して一様有界であることが分かる. よって, 弱コンパクト性定理から, ある部分列 $\{\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1\}_{i=1}^\infty$ と $\bar{f}_j^1 \in H^1(M_1, g_1)$ が存在して, $\lambda_j(M, g_{\varepsilon_i}) \rightarrow \alpha_j$ かつ $\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1 \rightarrow \bar{f}_j^1$ ($\varepsilon_i \rightarrow 0$) $H^1(M_1, g_1)$ 弱収束する. さらに, Rellich の定理より, 埋め込み $H^1(M_1, g_1) \subset L^2(M_1, g_1)$ はコンパクトなので, $\{\bar{f}_{j,\varepsilon_i}^1\}_i$ は $L^2(M_1, g_1)$ で強収束する.

この時, 極限 \bar{f}_j^1 が (M_1, g_1) の固有関数になることを示す. すべての support がコンパクトな C^∞ 関数 $\varphi \in C_0^\infty(M_1 \setminus \{x_1\})$ に対して,

$$q_{g_1}(\bar{f}_j^1, \varphi) = \alpha_j (\bar{f}_j^1, \varphi)_{L^2(M_1, g_1)}$$

の成立が分かる. 今, 埋め込み $C_0^\infty(M_1 \setminus \{x_1\}) \subset H^1(M_1, g_1)$ は dense なので (例えば, [A-86] を参照), すべての $\varphi \in H^1(M_1, g_1)$ に対して, $q_{g_1}(\bar{f}_j^1, \varphi) = \alpha_j (\bar{f}_j^1, \varphi)_{L^2(M_1, g_1)}$ が成立する. 弱解の正則性定理から, $\bar{f}_j^1 \in C^\infty(M_1)$ であり $\Delta_{g_1} \bar{f}_j^1 = \alpha_j \bar{f}_j^1$ が成立する.

もし, $\{\bar{f}_0^1, \dots, \bar{f}_k^1\}$ が正規直交的であれば, 固有値の番号付けから $\lambda_k(M_1, g_1) \leq \alpha_k$ が結論できる.

そこで、以下では $\{\bar{f}_0^1, \dots, \bar{f}_k^1\}$ が正規直交的であることを示す。

まず、 $\tilde{f}_{j,\varepsilon}^2 := \varepsilon^{m/2} f_{j,\varepsilon}^2$ と置く。すると、 $\{\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2\}_i$ は $H^1(M_2(1), g_2)$ で有界なことが分かるので、部分列 $\{\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2\}_i$ と $\tilde{f}_j^2 \in H^1(M_2(1), g_2)$ が存在して、 $\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2 \rightarrow \tilde{f}_j^2$ ($i \rightarrow \infty$) が $H^1(M_2(1), g_2)$ 弱収束、かつ、 $L^2(M_2(1), g_2)$ 強収束する。

補題 4.1. $\tilde{f}_j^2 = 0$ が成立する。

この補題が成立すれば、最初の正規直交性が極限 $\{\bar{f}_0^1, \dots, \bar{f}_k^1\}$ においても保たれることが分かる。

以下、補題 4.1 の証明をしよう。 $\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2 \rightarrow \tilde{f}_j^2$ は $H^1(M_2(1), g_2)$ で弱収束するので、

$$\|d\tilde{f}_j^2\|_{L^2(M_2(1), g_2)}^2 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i^2 Q_{\varepsilon_i}(f_{j,\varepsilon_i}, f_{j,\varepsilon_i}) = 0,$$

すなわち、 \tilde{f}_j^2 は定数である。さらに、 $\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2 \rightarrow \tilde{f}_j^2$ は $H^1(M_2(1), g_2)$ で強収束することも分かる。

一方、 $\tilde{f}_j^2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)} = 0$ となることが分かる。実際、 f_{j,ε_i} の貼り付け条件 (定義 2.2) と Anné [A-87] による trace estimate から、

$$\|\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)}\|_{L^2(\partial M_2(1), \partial g_2)} \leq \begin{cases} C\varepsilon_i \sqrt{|\log \varepsilon_i|} \|f_{j,\varepsilon_i}^1\|_{H^1(M_1(\varepsilon_i), g_1)} & (m = 2), \\ C\varepsilon_i \|f_{j,\varepsilon_i}^1\|_{H^1(M_1(\varepsilon_i), g_1)} & (m \geq 3) \end{cases}$$

が成立する。 $\|f_{j,\varepsilon_i}^1\|_{H^1(M_1(\varepsilon_i), g_1)}$ の有界性から、 $\|\tilde{f}_{j,\varepsilon_i}^2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)}\|_{L^2(\partial M_2(1), \partial g_2)} \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$) を得る。ゆえに、trace 作用素の連続性より、 $\tilde{f}_j^2 \upharpoonright_{\partial M_2(1)} = 0$ である。 \tilde{f}_j^2 は定数だったので、 $\tilde{f}_j^2 = 0$ が結論される。

こうして、すべての証明が完了し、定理 1.1 の成立が分かる。□

5 微分形式の場合

この章では定理 1.2 の証明を min-max 原理を用いて行う。まず、Hodge theory より、 $k = 1, \dots, b$ ($b := b_p(M)$) に対して、 $\bar{\lambda}_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \equiv 0$ ($\varepsilon > 0$) である。そこで、 $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_k^{(p)}(M_1, g_1)$ を示せばよい。

min-max 原理より $H^1(\Lambda^p M, g_\varepsilon)$ の任意の $(k + b_p(M))$ -次元部分空間 E_ε に対して、次の不等式が成立する：

$$\lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) = \bar{\lambda}_{k+b_p(M)}^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \sup_{u_\varepsilon \neq 0 \in E_\varepsilon} \frac{Q_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)}{\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Lambda^p M, g_\varepsilon)}^2}. \quad (5.1)$$

今、 E_ε として、 $\{\psi_{\varepsilon,1}, \dots, \psi_{\varepsilon,b}, \chi_\varepsilon \varphi_1, \dots, \chi_\varepsilon \varphi_k\}$ で生成される部分空間を取る。ただし、 $\{\psi_{\varepsilon,1}, \dots, \psi_{\varepsilon,b}\}$ は harmonic p -forms の空間 $\mathbf{H}^p(M; g_\varepsilon)$ の正規直交基底とし、 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ を固有値 $\lambda_j^{(p)}(M_1, g_1)$ に対応する (M_1, g_1) 上の正規直交的な固有 p -forms とする。そして、 χ_ε は次を満たす C^∞ 級の cut-off function である：

$$\chi_\varepsilon(r) := \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq \varepsilon), \\ 1 & (2\varepsilon \leq r), \end{cases}$$

かつ, $|d\chi_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$ ($\varepsilon \leq r \leq 2\varepsilon$) を満たす. ここに, r は x_1 からの距離である.

E_ε の元 u_ε は次のように書ける:

$$u_\varepsilon = \sum_{i=1}^b a_{i,\varepsilon} \psi_{\varepsilon,i} + \sum_{j=1}^k c_{j,\varepsilon} \chi_\varepsilon \varphi_j.$$

ただし, $a_{i,\varepsilon}, c_{j,\varepsilon}$ は ε による定数である. まず, (5.1) の分子は,

$$Q_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq (\lambda_k^{(p)}(M_1, g_1) + \delta(\varepsilon)) \sum_{i=1}^k c_{i,\varepsilon}^2$$

と評価できる. ここに, $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). 他方, 分母は

$$(\psi_{\varepsilon,i}, \chi_\varepsilon \varphi_j)_{L^2(AP M_1, g_1)} \rightarrow 0, \quad (\chi_\varepsilon \varphi_i, \chi_\varepsilon \varphi_j)_{L^2(AP M_1, g_1)} \rightarrow \delta_{ij} \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

であることが分かるので,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(AP M, g_\varepsilon)}^2 \geq (1 - \delta(\varepsilon)) \left\{ \sum_{i=1}^b a_{i,\varepsilon}^2 + \sum_{i=1}^k c_{i,\varepsilon}^2 \right\}$$

が従う. こうして, 以上の不等式を (5.1) に代入することで,

$$\lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \lambda_k^{(p)}(M_1, g_1) + \delta(\varepsilon)$$

が得られる. ただし, $\delta(\varepsilon)$ とは $\varepsilon \rightarrow 0$ の時, $\rightarrow 0$ となる項である. \square

6 関数と 1-form の固有値の gap 問題への応用

この章ではこれまでの結果の一つの応用として, 論文 [T-01a] において議論した関数と 1-form の固有値の gap の問題を考える.

(M^m, g) を m 次元の連結向き付けられた閉 Riemann 多様体とする. $\lambda_1^{(0)}(M, g)$, $\lambda_1^{(1)}(M, g)$ でそれぞれ関数 (0-form), 1-form の正の第 1 固有値を表す. Laplacian Δ と外微分作用素 d の可換性から, $\lambda_1^{(1)}(M, g) \leq \lambda_1^{(0)}(M, g)$ が成立する. 我々はこの不等式における等号の成立と不成立の状況を研究した. 簡単のために, 等号の成立する時の計量を gap がないと呼び, 等号の成立しない時を gap があると呼ぶ.

そして, 我々は m ($m \geq 3$) 次元の連結向き付けられた閉 Riemann 多様体 M 上に, それぞれ, gap のない/ある計量の存在を調べ, 次の事実を得た.

定理 6.1 ([T-01a]). M 上の計量 g で

$$\lambda_1^{(1)}(M, g) = \lambda_1^{(0)}(M, g)$$

となるもの, すなわち, gap のない計量が存在する.

今回, gap のある計量の存在を示すことができた.

定理 6.2. M 上の計量 g で

$$\lambda_1^{(1)}(M, g) < \lambda_1^{(0)}(M, g)$$

を満たすもの、すなわち、 gap のある計量が存在する。

この定理 6.2 は 98 年の幾何学シンポジウム [T-98] で発表したのが、その後、証明の一部に欠陥のあることが分かった。[T-01a] では、1 次の Betti 数 $b_1(M) = 0$ を満たす多様体で gap のある計量の存在を示した。今回、この Betti 数の仮定のない一般の場合の証明が完成した。

定理 6.1, 6.2 より、3 次元以上の閉多様体上には gap のない/ある計量の存在に位相的障害がないことが分かる。計量に曲率の条件を課した場合の gap 問題は興味深いと思うが、現在その詳細は不明である。なお、2 次元の場合は固有値の双対性からすべての計量に対して gap が無い。

以下、定理 6.2 を示そう。まず、球面 S^m 上に gap のある計量が存在した [T-01a] ので、それを、 (M_1, g_1) とする。標準的な計量では gap がないことを注意しておく。一方、 M に任意の計量を入れた Riemann 多様体を (M_2, g_2) とする。そして、[AC-93] より、 (M_1, g_1) (M_2, g_2) とともに 1 章で作った連結和の崩壊の仮定を満たすとしてよいことが分かる。

よって、定理 1.1 と定理 1.2 から次が分かる。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(0)}(M, g_\varepsilon) &= \lambda_1^{(0)}(S^m, g_1), \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(1)}(M, g_\varepsilon) &\leq \lambda_1^{(1)}(S^m, g_1). \end{aligned}$$

ゆえに、 (S^m, g_1) は gap があるので、十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ に対して、

$$\lambda_1^{(1)}(M, g_{\varepsilon_0}) < \lambda_1^{(0)}(M, g_{\varepsilon_0})$$

となる。こうして、 M 上に gap のある計量 g_{ε_0} が存在することが分かる。□

参考文献

- [A-86] C. Anné, Perturbation du $X - TUB^\varepsilon Y$ (conditions de Neumann), Séminaire de Théorie Spectre et Géométrie, Année 1985–1986, 4, Univ. Grenoble, (1986), 17–23.
- [A-87] C. Anné, Spectre du laplacien et écrasement d’anses, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4), **20** (1987), 271–280.
- [AC-93] C. Anné et B. Colbois, Opérateur de Hodge–Laplace sur des variétés compactes privées d’un nombre fini de boules, J. Func. Anal. **115** (1993), 143–160.
- [AC-95] C. Anné et B. Colbois, Spectre du Laplacien agissant sur les p -formes différentielles et écrasement d’anses, Math. Ann. **303** (1995), 545–573.

- [CF-81] I. Chavel and E. Feldman, Spectra of manifolds with small handles, *Comment. Math. Helv.* **56** (1981), 83–102.
- [Ct-87] G. Courtois, Comportement du spectre d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine, Thèse, Institut Fourier, Grenoble (1987).
- [F-87] K. Fukaya, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator, *Invent. Math.* **87** (1987), 517–547.
- [RT-75] J. Rauch and M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, *J. Func. Anal.* **18** (1975), 27–59.
- [RR-92] M. Renardy and R. C. Rogers, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Math. 13, Springer-Verlag (1992).
- [S-01] T. Shioya, Convergence of Alexandrov spaces and spectrum of Laplacian, *J. Math. Soc. Japan* **53** (2001), 1–15.
- [T-98] J. Takahashi, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and 1-forms, 第45回幾何学シンポジウム (1998), 71–77.
- [T-01a] J. Takahashi, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and 1-forms, *J. Math. Soc. Japan* **53** (2001), 307–320.
- [T-01b] J. Takahashi, Collapsing of connected sums and the eigenvalues of the Laplacian, preprint, to appear in *J. Geom. Phys.* (2001).

東京大学大学院数理科学研究科, 東京都目黒区駒場 3-8-1
 e-mail: junya@ms.u-tokyo.ac.jp