

偶数次元球面の p -form の小さい固有値と gap 問題

東北大理 (学振特別研究員 PD) 高橋淳也

1 序章

閉 Riemann 多様体の崩壊における関数に作用する Laplacian の固有値の研究は良く行われている. Cheeger と Colding [ChC-00] によって, Ricci 曲率が下に有界で直径が上に有界な Riemann 多様体の列が測度付き Gromov-Hausdorff 収束すると, 対応する Laplacian の固有値も収束することが証明されている.

一方, 微分形式に作用する Laplacian の場合, 固有値の振る舞いは関数の場合ほど良く分かっていない. 状況はより複雑である. 最近, Lott [L-01], [L-02a] は, 断面曲率が上下一様に有界で固定された直径が上に有界な場合の崩壊における p -form に対する固有値の収束定理を証明した.

よって, 我々は断面曲率が下にのみ有界な族における崩壊と p -form の固有値の収束問題に興味があるが, adiabatic limit のような特別な場合 [F-95] を除くと, この問題の結果は知られていない. そこで, この問題について調べたいのだが, 一般的状況で行うのは難しいように思われる. そのため, 興味深い現象の一つである p -form の小さい固有値の存在を調べることにする. ここで, 小さい固有値とは, Ricci 曲率が下に有界で直径が上に有界な Riemann 多様体の崩壊において, 0 へ収束する p -form の正の固有値のことである. 小さい固有値の存在は Colbois と Courtois [CoC-90] によって発見された現象である. なお, 関数に作用する場合には, 小さい固有値は存在しない [LY-80]. これより, 小さい固有値の存在は, 微分形式の固有値特有の現象であることが分かる.

我々は小さい固有値の研究の第一歩として, 偶数次元球面 S^{2n} と S^{4n} の崩壊という具体的な例について考察する. G を連結コンパクト Lie 群で, 連結閉 Riemann 多様体 (M, g_M) に効果的かつ等長的に作用しているとす. この時, Yamaguchi [Y-91] により, M 上に計量の族 g_ε で, (M, g_ε) が $(M, g_M)/G$ へ曲率の下への有界性を保ちながら崩壊するものが構成出来る. さて, 我々の例は以下の通りである. $G := S^1$, $(M, g_M) := S^{2n}(1)$ とす. $S^{2n}(1)$ への S^1 -作用は, 大球に平行な小球 S^{2n-1} に Hopf fibration としての作用を考える. この時, Yamaguchi の構成法から, 我々は (S^{2n}, g_ε) が $\mathbb{C}P^{n-1}$ の spherical suspension に崩壊する例を得る. (S^{2n}, g_ε) の断面曲率は上に有界ではなく, また, 極限空間は特異点を持つ空間で多様体ではない.

(M, g) を m 次元の連結, 向き付けられた, 閉 Riemann 多様体とし, それ上の p -form に作用する Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$ の正の第 k 固有値 (重複度込み) を $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ と書く. この時, 我々は次を得た.

定理 1.1 ([Tk-01b]). $2n$ ($n \geq 2$) 次元球面 S^{2n} 上に, 断面曲率 $K_{g_\varepsilon} \geq 0$ かつ直径 $\text{diam}(S^{2n}, g_\varepsilon) \leq d$ となる計量の族 $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が存在して, p が n かつ奇数の場合を除くすべての $1 \leq p \leq 2n - 1$ に対して,

$$\lambda_1^{(0)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \geq C, \quad \lambda_1^{(p)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

が成立する. ここで, C は ε に依らない正の定数である.

さらに, この 4 元数版について考える. すなわち, $G := S^3$ が $M := S^{4n}(1)$ に, 各小球 S^{4n-1} に Hopf S^3 -fibration としての作用を考えると, (S^{4n}, g_ε) の $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}$ の spherical suspension への崩壊を得る.

定理 1.2 ([Tk-01b]). $4n$ ($n \geq 1$) 次元球面 S^{4n} 上に, $K_{g_\varepsilon} \geq 0$ かつ $\text{diam}(S^{4n}, g_\varepsilon) \leq d$ となる, ある計量の族 $\{g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が存在して,

$$\lambda_1^{(0)}(S^{4n}, g_\varepsilon) \geq C, \quad \lambda_1^{(p)}(S^{4n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$$

を満たす. ただし, C は ε に依らない正の定数であり, p は以下の値を取る: n が偶数の場合は,

$$\begin{aligned} p &\equiv 0, 3 \pmod{4} \text{ for } 1 \leq p \leq 2n, \\ p &\equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ for } 2n \leq p \leq 4n - 1, \end{aligned}$$

であり, n が奇数の場合は

$$\begin{aligned} p &\equiv 0, 3 \pmod{4} \text{ for } 1 \leq p \leq 2n - 2, \\ p &\equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ for } 2n + 2 \leq p \leq 4n - 1 \end{aligned}$$

である.

注意 1.3. 最近, Lott [L-02b] は Yamaguchi によって構成された崩壊について, 小さい固有値の存在を証明した. その結果から球面の場合にはより強い結果が得られる. すなわち, $\varepsilon \rightarrow 0$ の時, すべての $1 \leq p \leq 2n - 1$ に対して, $\lambda_1^{(p)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ であり, また, すべての $3 \leq p \leq 4n - 3$ となる $p \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$ に対して, $\lambda_1^{(p)}(S^{4n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ である.

次に, 閉 Riemann 多様体 (M, g) 上の固有値 $\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(q)}(M, g)$ の差に, どのような幾何学的性質が反映しているか, という点について研究した. p -form の固有値の研究の目標の一つは, 各 p ごとに対する固有値の持つ幾何学的情報を明らかにすることである.

まず, 次の例を見よう. \bar{g}_t を 3 次元球面 S^3 の体積を正規化した Berger 計量とする. すなわち, 標準的計量 g に関する単位 Killing 1-form η に対して, $\bar{g}_t :=$

$t^{-1}\{g + (t^3 - 1)\eta \odot \eta\}$ である. すると, Tanno [Tn-79], [Tn-83] と Urakawa [U-79] の結果より, $t \rightarrow \infty$ の時,

$$\lambda_1^{(0)}(S^3, \bar{g}_t) \rightarrow \infty, \quad \lambda_1^{(1)}(S^3, \bar{g}_t) \leq C$$

である. ただし, C は t に依らない正の定数である.

こうして, 十分大きい t に対しては, (S^3, \bar{g}_t) の関数と 1-form に作用する第 1 固有値の振る舞いが異なることが分かる. 我々はこのような form の各次数ごとによる固有値の振る舞いの違いに関係する幾何学に興味がある. しかし, 一般的にこの問題を明らかにすることは大変難しいように思われる. そこで, 我々はその研究の第一歩として, 任意の閉多様体 M が $\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(0)}(M, g)$ が異なるような計量 g を許容するかどうかについて考察した.

始めに $p = 1$ の場合を考察した (この結果は今年の幾何学シンポジウムで発表済み). まず, Δ と d は可換なので, 常に $\lambda_1^{(1)} \leq \lambda_1^{(0)}$ が成立する.

定理 1.4 ([Tk-01a], [Tk-01c]). M^m を任意の $m \geq 3$ 次元, 連結, 向き付けられた閉多様体とする. この時, M 上に 2 種類の計量 g_i ($i = 1, 2$) が存在して,

$$\lambda_1^{(1)}(M, g_1) = \lambda_1^{(0)}(M, g_1), \quad \lambda_1^{(1)}(M, g_2) < \lambda_1^{(0)}(M, g_2)$$

が成立する.

ここでは, 一般の $p \geq 2$ の場合を考察した. この場合には, 逆向きの不等式 $\lambda_1^{(p)} > \lambda_1^{(0)}$ の成立も起こることに注意しよう.

定理 1.5 ([Tk-01c]). M^m を任意の $m \geq 4$ 次元, 連結, 向き付けられた閉多様体とする. このとき, すべての $2 \leq p \leq m - 2$ に対して, M 上に 3 種類の計量 g_i ($i = 1, 2, 3$) が存在して,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(p)}(M, g_1) &> \lambda_1^{(0)}(M, g_1), \\ \lambda_1^{(p)}(M, g_2) &< \lambda_1^{(0)}(M, g_2), \\ \lambda_1^{(p)}(M, g_3) &= \lambda_1^{(0)}(M, g_3) \end{aligned}$$

が成立する.

最後に, Riemann 多様体に制限を課した際の $\lambda_1^{(p)}(M, g)$ と $\lambda_1^{(0)}(M, g)$ の差について考察した. 始めに, Ricci 曲率が正の Einstein 多様体の場合は, $\lambda_1^{(1)}(M, g) < \lambda_1^{(0)}(M, g)$ が成立すれば, 恒等写像が調和写像の意味で弱安定となることが分かった. しかし, 一般の Riemann 多様体ではもはやこれは成立しない. また, (M, g) が 0 でない平行な p -形式を持つ場合には, $\lambda_1^{(p)}(M, g) \leq \lambda_1^{(0)}(M, g)$ が成立することも分かる.

2 S^{2n} の崩壊の構成

この節では Yamaguchi [Y-91] による崩壊の構成を復習した後、球面の崩壊の例を見る。

G を 1 次元以上の連結コンパクト Lie 群とし、連結閉 Riemann 多様体 (M, g_M) に等長かつ効果的に作用しているとする。このとき、対角的 G -作用により直積 Riemann 多様体 $(P, \tilde{g}_\varepsilon) := (G \times M, \varepsilon^2 g_G \oplus g_M)$ に等長的に作用する。ただし、 g_G は G 上の両側不変計量である。すると、この作用は自由であり、その商空間は M で、商写像 $\pi : P \rightarrow M, (\alpha, x) \mapsto \alpha^{-1}x$ は主 G -束をなす。 M 上の計量 g_ε で、 $\pi : (P, \tilde{g}_\varepsilon) \rightarrow (M, g_\varepsilon)$ が Riemannian submersion となるものが一意的に存在する。この時、O'Neill の公式 [O-66] により、 (M, g_ε) の断面曲率は下から ε に依らずに一様に押しえられる。こうして、我々は群作用を持つ多様体 M の崩壊を得る。まとめると、

定理 2.1 (Yamaguchi [Y-91]). (M, g_M) を閉 Riemann 多様体、 G を (M, g_M) へ効果的かつ等長的に作用する 1 次元以上のコンパクト Lie 群とする。このとき、 M 上の計量の族 g_ε で、 (M, g_ε) が $(M, g_M)/G \curvearrowright K_{(M, g_\varepsilon)} \geq \kappa$ と $\text{diam}(M, g_\varepsilon) \leq d$ を満たしながら崩壊するものが存在する。ここに、 κ と d は ε に依らない定数である。

さて、 M を球面とした場合の崩壊の例を見よう。

例 A. $G := S^1$ は $(M, g_M) := (S^{2n+1}(1), g) \curvearrowright \text{Hopf } S^1\text{-fibration}$ として、等長的かつ自由に作用する。これより、 $(S^{2n+1}, g_\varepsilon)$ の複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, h_{\mathbb{C}P^n})$ への崩壊で、曲率の有界性を保った物が得られる。実際、計量 g_ε は次の様に表示される：

$$g_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + 1} g_V \oplus g_H,$$

ただし、 g_V と g_H は g の垂直成分、水平成分である。この時、[CoC-90], [CoC-00], [F-95] より、次が分かる。

命題 2.2. ε に依らないある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $1 \leq p \leq 2n$ に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ の時、

$$\lambda_1^{(p)}(S^{2n+1}, g_\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \lambda_2^{(p)}(S^{2n+1}, g_\varepsilon) \geq C$$

である。すなわち、小さい固有値が丁度 1 個存在する。

例 B. $G := S^1$, $(M, g_M) := S^{2n}(1)$ と取る。 $S^{2n}(1)$ への S^1 -作用は、平行な超球面 S^{2n-1} の各々に Hopf S^1 -fibration としての作用である。正確に書くと、

$$S^{2n}(1) := \{(t, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \mid t^2 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2 = 1\}$$

とした時、 $a \in S^1 = U(1) = \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1\}$ の S^{2n} への作用は $a \cdot (t, z^1, \dots, z^n) := (t, az^1, \dots, az^n)$ である。この作用は効果的かつ等長的である（自由ではない）。すると、Yamaguchi の崩壊の構成（定理 2.1）から、我々は (S^{2n}, g_ε) から複素射影空間の spherical suspension $\Sigma \mathbb{C}P^{n-1}$ への崩壊を得る。この極限空間は、2 つの特異点を持ち、 $n \geq 3$ の時は位相多様体ですらない。

今, $0 \leq r \leq \pi$ に対して $t = -\cos(r)$ と置き, S^{2n} の 2 点を $x_0 := (-1, 0, \dots, 0)$, $x_\pi := (1, 0, \dots, 0)$ と書く. $\Sigma^* \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ を $\Sigma \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ から 2 つの特異点を取り除いた空間とすると, Riemann 多様体 $((0, \pi) \times \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, dr^2 \oplus \sin^2(r)h_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}})$ と等長的である. この座標に関して, $S^{2n} \setminus \{x_0, x_\pi\}$ 上の計量 g_ε は

$$g_\varepsilon = dr^2 + \sin^2(r)h_H + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(r)}{\varepsilon^2 + \sin^2(r)}h_V, \quad (2.1)$$

と書ける. ただし, $h = h_H + h_V$ は $S^{2n-1}(1)$ の標準的計表で, h_H と h_V は Hopf fibration $S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ の水平成分と垂直成分である. なお, (S^{2n}, g_ε) の断面曲率は ε について上に有界でない.

この時, 小さい固有値の存在についての結果が定理 1.1 である.

例 C. 次に, $G = S^3$ の場合を考える. S^3 は $(M, g_M) := (S^{4n+3}(1), g)$ に Hopf S^3 -fibration として, 自由かつ等長的に作用する. 故に, $(S^{4n+3}, g_\varepsilon)$ の断面曲率の下への有界性を保ちながら 4 元数射影空間 $(\mathbb{H}\mathbb{P}^n, h_{\mathbb{H}\mathbb{P}^n})$ への崩壊を得る. なお, この場合は断面曲率は上に有界でないことに注意する. この時, Forman [F-95] より, 小さい固有値の存在が分かる.

命題 2.3 ([F-95]). ε に依らない定数 $C > 0$ が存在して, $1 \leq p \leq 4n+2$ に対して $\varepsilon \rightarrow 0$ の時,

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(p)}(S^{4n+3}, g_\varepsilon) &\rightarrow 0, & \lambda_2^{(p)}(S^{4n+3}, g_\varepsilon) &\geq C \quad \text{if } p \equiv 0, 3 \pmod{4}, \\ \lambda_1^{(p)}(S^{4n+3}, g_\varepsilon) &\geq C \quad \text{if } p \equiv 1, 2 \pmod{4}, \end{aligned}$$

が成立する.

例 D. 最後に, 例 B の 4 元数版を考えよ. すなわち, $G := S^3$, $(M, g_M) := (S^{4n}(1))$ と取り, S^{4n} への S^3 -作用は, 平行な超球面 S^{4n-1} の各々に Hopf S^3 -fibration としての作用である. すると, (S^{4n}, g_ε) の断面曲率の下への有界性を保ちながら, 4 元数射影空間の spherical suspension $\Sigma \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}$ への崩壊が得られる.

この時, 小さい固有値の存在についての結果が定理 1.2 である.

3 定理 1.1 と 1.2 の証明

この節を通して, C でパラメーター ε や t 等によらない定数を表わすことにする.

まず, $a = 1$ あるいは 3 とする. $n \geq 2$ に対して, $m_a := (a+1)n$ と $n_a := (a+1)(n-1)$ とする. この時, 我々は (S^{m_a}, g_ε) の小さい固有値について考える. 今, n_a 次元の閉 Riemann 多様体 N_a を, $a = 1$ の時は $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$, $a = 3$ の時は $\mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}$ とする. $\pi_a : S^{m_a-1}(1) \rightarrow N_a$ を Hopf S^a -fibration とし, h を $S^{m_a-1}(1)$ の計量とする. また, $\lambda_1^{(p)}$ と $\lambda_1''^{(p)}$ で exact と co-exact p -form に作用する Laplacian の第 1 固有値を表わす.

補題 3.1. $H^p(N_a; \mathbb{R}) \neq 0$ となる $p > \frac{1}{2}(m_a - a + \frac{1}{2})$ に対して, ある ε に依らない定数 $C > 0$ が存在して,

$$\lambda_1^{(p+1)}(S^{m_a}, g_\varepsilon) \leq C\sqrt{\varepsilon}$$

を満たす.

証明. まず, $H^p(N_a; \mathbb{R}) \neq 0$ より, N_a 上の自明でない調和 p -form $\bar{\omega}$ が存在する. この時, $(p+1)$ -form $\sin^{-n_a+2p}(r)dr \wedge \bar{\omega}$ は $\Sigma^* N_a$ 上調和である. $S^{m_a} \setminus \{x_0, x_\pi\}$ 上の pull-back form を次で定める.

$$\omega := \sin^{-n_a+2p}(r)dr \wedge \pi_a^*(\bar{\omega}).$$

S^{m_a} 上の cut-off function の族 $\{f_t\}_{t>0}$ を以下を満たすように取る:

$$f_t(r) := \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq t, \pi - t \leq r \leq \pi), \\ 1 & (2t \leq r \leq \pi - 2t), \end{cases}$$

$|f'_t| \leq \frac{C}{t}$ かつ f_t は $r = \frac{\pi}{2}$ について対称である. S^{m_a} 上の $(p+1)$ -form を

$$\omega_t := f_t \cdot \omega.$$

で定義する. すると, ω_t は S^{m_a} 上の C^∞ 級の閉 $(p+1)$ -形式であることが分かる. 今, $H^{p+1}(S^{m_a}; \mathbb{R}) = 0$ なので, ω_t は S^{m_a} 上の exact form である. 故に, ω_t を min-max 原理の test form として適用できて,

$$\lambda_1^{(p+1)}(S^{m_a}, g_\varepsilon) \leq \frac{\|\delta_{g_\varepsilon} \omega_t\|_{L^2(\Lambda^p S^{m_a}, g_\varepsilon)}^2}{\|\omega_t\|_{L^2(\Lambda^{p+1} S^{m_a}, g_\varepsilon)}^2} \quad (3.1)$$

が従う. 以下, 右辺を上から評価する. 簡単のため, $\varphi_\varepsilon(r) := \frac{\varepsilon \sin(r)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2(r)}}$, $\psi(r) := \sin(r)$ と置く.

始めに, (3.1) の分母を評価する. $2t \leq \frac{\pi}{4}$ なる t に対して,

$$\begin{aligned} \|\omega_t\|_{L^2(\Lambda^{p+1} S^{m_a}, g_\varepsilon)}^2 &\geq 2^{-\frac{a}{2}} \varepsilon^a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^{-n_a+2p+a}(r) dr \|\pi_a^*(\bar{\omega})\|_{L^2(\Lambda^p S^{m_a-1, h})}^2 \\ &\geq C \varepsilon^a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

次に, (3.1) の分子を評価する. まず,

$$\begin{aligned} &\|\delta_{g_\varepsilon} \omega_t\|_{L^2(\Lambda^p S^{m_a}, g_\varepsilon)}^2 \\ &\leq C \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{(f'_t)^2 + \varphi_\varepsilon^{-2}(\varphi'_\varepsilon)^2 + \varphi_\varepsilon^2 \psi^{-4}\} \psi^{-n_a+2p} \varphi_\varepsilon^a dr \|\pi_a^*(\Sigma^* N_a \bar{\omega})\|_{L^2(\Lambda^* S^{m_a-1, h})}^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

が分かる. ここで, (3.3) の第 1 項は

$$\int_0^\pi (f'_t)^2 \psi^{-n_a+2p} \varphi_\varepsilon^a dr \leq \varepsilon^a C t^{-n_a+2p-1}.$$

$-n_a+2p-1 > 0$ なので, ある $t_0 > 0$ が存在して $t < t_0$ に対して, $t^{-n_a+2p-1} \leq \sqrt{\varepsilon}$ を満たす. 故に,

$$\int_0^\pi (f'_t)^2 \psi^{-n_a+2p} \varphi_\varepsilon^a dr \leq C \varepsilon^a \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.4)$$

次に, 第 2 項は

$$\varphi_\varepsilon^{a-2} (\varphi'_\varepsilon)^2 \psi^{-n_a+2p} \leq C \varepsilon^a \sqrt{\varepsilon} \sin^{-n_a+2p-\frac{5}{2}}(r).$$

仮定より $-n_a+2p-\frac{5}{2} > -1$ なので, 積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-n_a+2p-\frac{5}{2}}(r) dr$ は収束する. 故に, (3.3) の第 2 項は

$$\int_0^\pi \varphi_\varepsilon^{a-2} (\varphi'_\varepsilon)^2 \psi^{-n_a+2p} dr \leq C \varepsilon^a \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.5)$$

最後に, (3.3) の第 3 項だが, これは第 2 項と同様にして評価できる:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_\varepsilon^{a+2} \psi^{-n_a+2p-4} dr \leq C \varepsilon^a \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.6)$$

以上より, (3.4), (3.5), (3.6) を (3.3) に代入すると,

$$\|\delta_{g_\varepsilon} \omega_t\|_{L^2(\Lambda^p S^{m_a, g_\varepsilon})}^2 \leq C \varepsilon^a \sqrt{\varepsilon} \quad (3.7)$$

を得る. よって, (3) と (3) を (3.1) に代入すれば, $\lambda_1^{(p+1)}(S^{m_a, g_\varepsilon}) \leq C \sqrt{\varepsilon}$ の成立が分かる. \square

さて, この補題を用いて定理 1.1 を証明しよう. なお, 定理 1.2 の証明も同様なので省略する.

定理 1.1 の証明. 始めに, n が偶数の場合を考える. p の取り得る値は $n \leq p \leq 2n-2$ かつ $p \equiv 0 \pmod{2}$ である. 補題 3.1 と関係式 $\lambda_1^{(p+1)} = \lambda_1^{(p)}$ より, すべての $n \leq q \leq 2n-1$ に対して, $\varepsilon \rightarrow 0$ の時 $\lambda_1^{(q)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ が成立する. Hodge 双対性 $\lambda_1^{(p)} = \lambda_1^{(2n-p)}$ から, すべての $1 \leq q \leq 2n-1$ に対して, $\lambda_1^{(q)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ が分かる.

次に n が奇数の場合を考える. p の取り得る値は $n+1 \leq p \leq 2n-2$ かつ $p \equiv 0 \pmod{2}$ である. 補題 3.1 と関係式 $\lambda_1^{(p+1)} = \lambda_1^{(p)}$ より, すべての $n+1 \leq q \leq 2n-1$ に対して, $\varepsilon \rightarrow 0$ の時, $\lambda_1^{(q)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ が成立する. Hodge 双対性より, $q = n$ を除く $1 \leq q \leq 2n-1$ に対して, $\lambda_1^{(q)}(S^{2n}, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ が分かる. \square

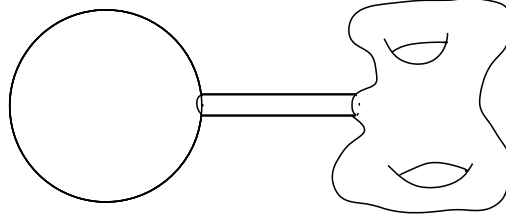


図 1: (\bar{M}, g_ε)

4 定理 1.5 の証明の概略

始めに, $\lambda_1^{(p)}(M, g_1) > \lambda_1^{(0)}(M, g_1)$ となる計量 g_1 を構成を行う. 図 1 の様に, S^m と M に任意の計量 g_{S^m} と g_M をとり, 半径 ε の円柱 C_ε で繋いだ多様体を (\bar{M}, g_ε) とする. M と \bar{M} は微分同相なので, \bar{M} 上に求める計量を構成すればよい.

今, 円柱の半径 ε を 0 へ近づけることを考える. これは, 鉄垂鈴の崩壊と呼ばれている. この時, Anné と Colbois [AC-95] の結果から,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(0)}(\bar{M}, g_\varepsilon) &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(p)}(\bar{M}, g_\varepsilon) &= \min\{\lambda_1^{(p)}(S^m, g_{S^m}), \lambda_1^{(p)}(M, g_M)\} \end{aligned}$$

が分かる. よって, 十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ をとれば, $\lambda_1^{(p)}(\bar{M}, g_{\varepsilon_0}) > \lambda_1^{(0)}(\bar{M}, g_{\varepsilon_0})$ となり, この g_{ε_0} が求める計量 g_1 である.

なお, Gentile と Pagliara [GP-95] の結果より, 円柱の部分を伸ばしても求める計量が得られる.

次に, $m \geq 3$ 次元多様体 M 上に $\lambda_1^{(p)}(M, g_2) < \lambda_1^{(0)}(M, g_2)$ となる計量 g_2 を構成する. まず, $M = S^m$ の場合を考察する. m が奇数の場合は命題 2.2 より, m が偶数の場合は定理 1.1 と Lott [L-02b] (注意 1.3) より, S^m 上に求める計量が存在することが分かる.

一般の多様体の場合には, 貼り付けの議論で行う. すなわち, 今得られた S^m 上の計量を h とし, M には任意の計量 g_M を取る. この時, (S^m, h) と $(M, \varepsilon^2 g_M)$ の連結和を取り, それを $(\tilde{M}, g_\varepsilon)$ と書こう (図 2). もちろん, M と \tilde{M} は微分同相なので, \tilde{M} 上に求める計量を構成すれば十分である.

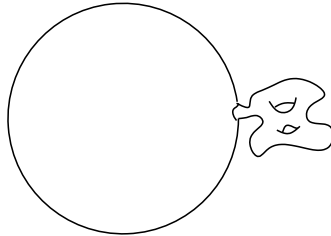


図 2: $(\tilde{M}, g_\varepsilon)$

この時, [Tk-02] と [Tk-01c] から,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(0)}(\tilde{M}, g_\varepsilon) &= \lambda_1^{(0)}(S^m, h), \\ \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1^{(p)}(\tilde{M}, g_\varepsilon) &\leq \lambda_1^{(p)}(S^m, h)\end{aligned}$$

が分かる. よって, $\lambda_1^{(p)}(S^m, h) < \lambda_1^{(0)}(S^m, h)$ なので, 十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ をとれば, $\lambda_1^{(p)}(\tilde{M}, g_{\varepsilon_0}) < \lambda_1^{(0)}(\tilde{M}, g_{\varepsilon_0})$ の成立が分かる.

最後に等号の成立する計量の存在は, 上の 2 つの計量 g_1 と g_2 から分かる. 実際, g_1 と g_2 を結ぶ計量の 1 パラメーター族を取ると, このパラメーターに関して固有値は連続なので, 中間値の定理から等号の成立する計量 g_3 の存在が分かる. \square

参考文献

- [AC-95] C. Anné et B. Colbois, Spectre du Laplacien agissant sur les p -formes différentielles et écrasement d'anses, *Math. Ann.* **303** (1995), 545–573.
- [ChC-00] J. Cheeger and T. H. Colding, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, *J. Diff. Geom.* **54** (2000), 37–74.
- [CoC-90] B. Colbois and G. Courtois, A note on the first nonzero eigenvalue of the Laplacian acting on p -forms, *Manuscripta Math.* **68** (1990), 143–160.
- [CoC-00] _____, Petites valeurs propres des p -formes différentielles et classe d'Euler des S^1 -fibrés, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4)* **33** (2000), 611–645.
- [F-95] R. Forman, Spectral sequences and adiabatic limits, *Comm. Math. Phys.* **168** (1995), 57–116.
- [GP-95] G. Gentile and V. Pagliara, Riemannian metrics with large first eigenvalue on forms of degree p , *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3855–3858.
- [LY-80] P. Li and S.T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, *Proc. Symp. Pure Math.* **36** (1980), 205–239.
- [L-01] J. Lott, Collapsing and the differential form Laplacian: the case of a smooth limit space, preprint, to appear in *Duke Math. J.* (2001).
- [L-02a] _____, Collapsing and the differential form Laplacian: the case of a singular limit space, preprint, mathDG/0201289, (2002).
- [L-02b] _____, Remark about the spectrum of the p -form Laplacian under a collapse with curvature bounded below, preprint, mathDG/0202196, (2002).

- [O-66] B. O’Neill, Fundamental equations of a submersion, *Michigan Math. J.* **13** (1966), 459–469.
- [Tk-01a] J. Takahashi, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and 1-forms, *J. Math. Soc. Japan* **53** (2001), 307–320.
- [Tk-02] _____, Collapsing of connected sums and the eigenvalues of the Laplacian, *J. Geom. Phys.* **40** (2002), 201–208.
- [Tk-01b] _____, Small eigenvalues on p -forms for collapsings of the even dimensional spheres, preprint, to appear in *Manuscripta Math.* (2001).
- [Tk-01c] _____, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and p -forms, preprint, (2001).
- [Tn-79] S. Tanno, The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, *Tôhoku Math. J.* **31** (1979), 179–185.
- [Tn-83] _____, Geometric expressions of eigen 1-forms of the Laplacian on spheres, *Spectra of Riemannian Manifolds*, Kaigai Publications, Tokyo, (1983), 115–128.
- [U-79] H. Urakawa, On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 209–226.
- [Y-91] T. Yamaguchi, Collapsing and pinching under a lower curvature bound, *Ann. of Math.* **133** (1991), 317–357.

東北大学大学院理学研究科数学専攻, 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉
 e-mail: junya@math.tohoku.ac.jp