Riemann 多様体の崩壊と p-form の大きい固有値

東北大学情報科学研究科
高橋淳也

1 序章

(M^m, g) を連結，向き付けられた m 次元閉 Riemann 多様体とする．(M, g) 上の p-form に作用する Laplacian $\Delta = d\,\delta + \delta\,d$ の正の固有値を，重複度をこめて，

$$0 < \lambda_1^{(p)}(M, g) \leq \lambda_2^{(p)}(M, g) \leq \cdots \leq \lambda_k^{(p)}(M, g) \leq \cdots \to \infty$$

と書く．また，0 固有値は重複度を考慮せずに，一括して $\lambda_0^{(p)}(M, g) = 0$ とかく．これは，0 固有値の重複度は p 次 Betti 数と位相不変量であるから（de Rham-Hodge-Kodaira 理論），計量に依存する正の固有値と分けて考えるためである．

p-form のスペクトル幾何学の基本的なテーマの一つは，(M, g) の幾何と固有値 $\lambda_k^{(p)}(M, g)$ の関係を明らかにすることである．このために有効なアプローチとして，固有値を幾何学的なデータで上下から評価する，ということが考えられる．

まず，$p = 0$，すなわち，関数に作用する Laplacian の固有値の場合，$\lambda_1^{(0)}(M, g)$ の値は Ricci 曲率の下限と直径によって制御される．正確には，(M, g) が $\mathrm{Ric} \geq -\kappa^2$ かつ $0 < d_- \leq \mathrm{diam}(M, g) \leq d_+$ を満たすとき，ある定数 $C_1(m, \kappa, d_+), C_2(m, \kappa, d_-) > 0$ が存在して

$$0 < C_1(m, \kappa, d_+) \leq \lambda_1^{(0)}(M, g) \leq C_2(m, \kappa, d_-) \tag{1.1}$$

が成立する．左の不等式は，Gromov [G-80], Li and Yau [LY-80] により，右の不等式は Cheng [C-75] による．

一方，p-form $(1 \leq p \leq m-1)$ の場合には，一般に (1.1) のアナロジーは成立しない．実際，2 種類の閉 Riemann 多様体の族 $\{(M_k, g_{k,i})\}_{i=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2)$ で，$\mathrm{Ric}_{g_{k,i}} \geq -\kappa^2$ かつ $0 < d_- \leq \mathrm{diam}(M_k, g_{k,i}) \leq d_+$ を満たし，$i \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \lambda_1^{(p)}(M_1, g_{1,i}) \to 0, \\ &(2) \qquad \lambda_1^{(p)}(M_2, g_{2,i}) \to \infty \end{aligned}$$

となる物が存在する．この時，我々は (1) の固有値を小さい固有値と呼び，(2) の固有値を大きい固有値と呼ぶ．これらの固有値は関数の場合では存在せず，微分形式の場合特有の現象である．

さて，小さい固有値と大きい固有値の典型的な例を挙げる．

例 1.(小さい固有値) $\pi : (S^{2n+1}, g) \to (\mathbb{CP}^n, h_{\mathbb{CP}^n})$ を Hopf S^1-bundle とする．この時，計量 g を次のように変形する：$\varepsilon > 0$ に対して，

$$g_\varepsilon \;=\; \varepsilon^2 g_V \oplus g_H$$

と置く．ただし，g_V と g_H は g の垂直成分，水平成分である．この計量を備えた球面 $(S^{2n+1}, g_\varepsilon)$ は，Berger 球面と呼ばれる．この時，[CC-90], [CC-00], [F-95] より，小さい固有値の存在が分かる．

命題 1.1. ε に依らないある定数 $C > 0$ が存在して，すべての $1 \le p \le 2n$ に対して $\varepsilon \to 0$ の時，

$$\lambda_1^{(p)}(S^{2n+1}, g_\varepsilon) \;\to\; 0, \quad \lambda_2^{(p)}(S^{2n+1}, g_\varepsilon) \ge C$$

である．

特に，この場合，小さい固有値が丁度 1 個存在することが分かる．もちろん，一般には複数個存在することもあるし，全く存在しないこともある．

例 2.(大きい固有値) S^1 上の自明な S^3-bundle $M^4 := S^3 \times S^1$ を考える．この時，M に以下のような直積計量の族 g_ε を導入する．$pr_2 : (M^4 := S^3 \times S^1, g_\varepsilon := \varepsilon^2 g_{S^3} \oplus g_{S^1}) \to (S^1, g_{S^1})$, $\varepsilon > 0$．ここに，pr_2 は第 2 成分への射影を表す．この時，$K_{g_\varepsilon} \ge 0$ である．

命題 1.2. ε に依らないある定数 $C > 0$ が存在して，$\varepsilon \to 0$ の時，

$$\lambda_1^{(p)}(M^4, g_\varepsilon) \begin{cases} \le C & \textit{if } p \ne 2, \\ \to \infty & \textit{if } p = 2 \end{cases}$$

である．すなわち，2-*form* に大きい固有値が現れる．

証明は，固有値に対する Künneth の公式（直積多様体の固有値は各々の多様体の固有値の和になる，[GLP-99]）を用いて簡単にできる．しかし，これは後の議論の基本となるので，ここで証明を与えておく．

Proof. $p = 2$ の時，つまり，大きい固有値の存在の証明をする（他の場合は明らか）．固有値に対する Künneth の公式より，

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(2)}(M, g_\varepsilon) &= \min_{a+b=2, i+j\ne 0} \{\lambda_i^{(a)}(S^3, \varepsilon^2 g_{S^3}) + \lambda_j^{(b)}(S^1, g_{S^1})\} \\
&= \min\{\varepsilon^{-2}\lambda_1^{(1)}(S^3, g_{S^3}) + \lambda_0^{(1)}(S^1, g_{S^1}),\, \varepsilon^{-2}\lambda_1^{(2)}(S^3, g_{S^3}) + \lambda_0^{(0)}(S^1, g_{S^1})\} \\
&\quad \text{（ (a,b) の取り得る組は (1,1), (2,0) の 2 通りしか無いことに注意）} \\
&= \varepsilon^{-2}\min\{\lambda_1^{(1)}(S^3, g_{S^3}), \lambda_1^{(2)}(S^3, g_{S^3})\} \to \infty, \quad \text{as } \varepsilon \to 0
\end{aligned}$$

が分かる．ここで，$H^q(S^3; \mathbb{R}) = 0$ $(q = 1, 2)$，つまり，(S^3, g_{S^3}) に 0 固有値が存在しないことが鍵となっている． □

より一般に，adiabtic limit の場合を見る．$\pi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ を閉 Riemann 多様体間の Riemannian submersion で，fiber F も閉多様体とする．ただし，次元は $m > n \geq 1$ とし，fiber の次元を $r := m - n$ と書く．この時，M 上の Riemann 計量の族 g_ε を

$$g_\varepsilon := \varepsilon^2 g_V \oplus g_H, \quad \varepsilon > 0,$$

と定める．ただし，g_V は g の垂直成分，g_H は水平成分である．$\varepsilon \to 0$ の時，(M, g_ε) は Gromov-Hausdorff 距離に関して (N, h) に収束する．この収束する族を adiabatic limit と呼ぶ（正確には水平方向を伸ばすのだが，この場合も adiabatic limit と呼ばれている）．adiabatic limit において，一般には曲率の有界性は保たれない．Forman [F-95] の結果を用いれば，adiabatic limit の場合の p-form の大きい固有値の存在は以下のように特徴づけることができる．

定理 1.3 ([T-05a]). 上述の *adiabatic limit* に対して，次の 3 つの条件は同値である:

(1) $\lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \to \infty$ *as* $\varepsilon \to 0$ *for all* $k \geq 1$*;*
(2) $\lambda_k^{(p)}(M, g_\varepsilon) \to \infty$ *as* $\varepsilon \to 0$ *for some* $k \geq 1$*;*
(3) $n < p < r$ *and* $H^q(F; \mathbb{R}) = 0$ *for all* q *with* $p - n \leq q \leq p$*.*

こうして，adiabatic limit の場合の大きい固有値の存在には，form の次数の制限と fiber のコホモロジー群の消滅が関係していることが分かる．

我々は，他の（fiber bundle になっていない）崩壊の場合でも，このような事実が成立することを示すのが目標である（定理 2.1, 2.2）．

他方，大きい固有値が存在するのはかなり特殊な場合であると思われる．そこで，大きい固有値が存在しないための条件も考察する（系 6.7）．

なお，その他の小さい固有値，大きい固有値の例は， [ACGR-03], [L-02a], [L-02b], [L-04] , [J-03], [J-05], [T-02] 等で得られている．

2 主定理 —大きい固有値の存在—

この章では，まず我々の考察する崩壊を構成し，その後，その崩壊に対する大きい存在の結果（主定理，定理 2.1, 2.2）を述べる．

2つの連結，向き付け可能な境界付きコンパクト Riemann 多様体 $(N^n, g_N), (W^{r+1}, g_W)$ を考える（$n, r \geq 1$）．計量 g_N, g_W は境界の近くのカラー近傍上で直積的であると仮定する．この時，これらの多様体の境界を $(Z := \partial N, g_Z), (F := \partial W, g_F)$ と書く．ここに， g_Z, g_F は標準的に導かれる計量である．

$\varepsilon > 0$ に対して，次の 2 つの境界を持つコンパクトな Riemann 多様体の族を考える：

$$\begin{aligned} (M_1, g_{1,\varepsilon}) &:= (F \times N, \varepsilon^2 g_F \oplus g_N), \\ (M_2, g_{2,\varepsilon}) &:= (W \times Z, \varepsilon^2 g_W \oplus g_Z). \end{aligned}$$

この時，両者の境界は $(F \times Z, \varepsilon^2 g_F \oplus g_Z)$ と等長なので，境界で貼り付けることによって，我々は新しい連結，向き付けられた閉 C^∞-Riemann 多様体

$$(M, g_\varepsilon) := (M_1, g_{1,\varepsilon}) \cup_\partial (M_2, g_{2,\varepsilon})$$

を得る．この多様体の次元を $m := r + n$ と書く．すると，$\varepsilon \to 0$ の時，(M, g_ε) は Giromov-Hausdorff 距離に関して (N, g_N) に収束（崩壊）する．

定理 2.1 ([T-05a]). $n \geq 2$ の時，上で構成した崩壊 $(M^m, g_\varepsilon) \to (N^n, g_N)$ に対して，次の 3 つの条件を考える：

(1) $n < p < r$;

(2) $H^q(F; \mathbb{R}) = 0$ *for all* q *with* $p - n \leq q \leq p$;

(3) $H^q(W; \mathbb{R}) = H^q(W, \partial W; \mathbb{R}) = 0$ *for all* q *with* $p - n + 1 \leq q \leq p$.

この時，ある定数 $C > 0$ が存在して，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \begin{cases} \to \infty & \text{（条件 (1),(2),(3) をすべて満たす場合）}, \\ \leq C & \text{（その他の場合）}. \end{cases}$$

$n = 1$，すなわち，$N = I$（閉区間）の場合, 上の定理 2.1 の条件 (3) は必要ない．

定理 2.2 ([T-05a]). $n = 1$ の時，上で構成した崩壊 $(M^m, g_\varepsilon) \to (N^1, g_N)$ に対して，次の 2 つの条件を考える：

(1) $1 < p < m - 1$;

(2) $H^q(F; \mathbb{R}) = 0$ *for* $q = p - 1, p$.

この時，ある定数 $C > 0$ が存在して，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \begin{cases} \to \infty & \text{（条件 (1),(2) を満たす場合）}, \\ \leq C & \text{（その他の場合）}. \end{cases}$$

注意 2.3. 一般に，大きい固有値が存在ても，全体の空間のコホモロジー群が消えるとは限らない．実際，我々の状況で $W := T^m \setminus D^m$, $N := I$ と取ると，我々の崩壊は m-次元トーラスの連結和 $M = T^m \sharp T^m$ から区間 I となる．この時，$F = S^{m-1}$ なので，定理 *2.2* より，大きい固有値が存在するが，$H^p(M) \neq 0$ である．

なお，我々の崩壊は曲率を考慮していないが，曲率の条件を課した場合でも一般には全体のコホモロジー群の消滅は言えないと思われる．

3 応用—球面の場合—

この章では主定理 2.1, 2.2 の応用として，特別な場合 $M = S^m$ の時を考察する．(D^k, g_{D^k}) を k-次元の閉 disk で，断面曲率 $K_{g_{D^k}} \geq 0$ かつ境界の近傍では計量は直

積的になっている物とする．さて，2 章で行った我々の多様体の崩壊の構成法において，

$$
\begin{aligned}
(N^n, g_N) &= (D^n, g_{D^n}), \\
(W^{r+1}, g_{W^{r+1}}) &= (D^{r+1}, g_{D^{r+1}})
\end{aligned}
$$

と取る（$n, r \geq 1$）．この時，$F = \partial W = S^r$，$Z = \partial N = S^{n-1}$ より，我々の多様体 M は S^m と微分同相である：

$$
M = (S^r \times D^n) \cup_\partial (D^{r+1} \times S^{n-1}) \cong S^m.
$$

こうして，我々は m-次元球面から n-次元 disk への崩壊 $(S^m, g_\varepsilon) \to (D^n, g_{D^n})$ で，$K_{g_\varepsilon} \geq 0$ かつ $\sup_{S^m} K_{g_\varepsilon} \to \infty$ as $\varepsilon \to 0$ となる物を得た．なお，この崩壊は低次元の場合には [SY-00]（３次元の時），[Y-02]（４次元の場合）で与えられている．

さて，この球面の崩壊において，$F = S^r, W = D^{r+1}$ のコホモロジー群は消滅するので，定理 2.1, 2.2 の条件 (2), (3) は満たされる．ゆえに，系として次が分かる．

系 3.1. S^m 上の崩壊する計量の族 g_ε が存在して，(S^m, g_ε) は $K_{g_\varepsilon} \geq 0$ を保ったまま (D^n, g_{D^n}) へ崩壊し，$\varepsilon \to 0$ の時，

$$
\lambda_1^{(p)}(S^m, g_\varepsilon)
\begin{cases}
\to \infty & \text{if } \ n < p < r = m - n, \\
\leq C & \text{if } \ p \leq n \text{ or } r \leq p
\end{cases}
$$

となる．ただし，$C > 0$ は ε によらない定数である．

注意 3.2. 一般に，閉多様体 M が，断面曲率が上下一様に有界の下で崩壊する計量の族 $\{g_i\}_i$ を許容すれば，*Chern-Weil* 理論より，*Euler* 数 $\chi(M) = 0$ である．これより，$\chi(S^{2n}) = 2 \neq 0$ なので，偶数次元球面 S^{2n} は断面曲率が上下一様に有界の下で崩壊できない．

4　定理 2.1，2.2 の証明 — 前半 —

この章では，定理 2.1, 2.2 の証明の前半，すなわち，大きい固有値の存在の証明を行う．

我々は，固有値の下からの評価を得るために，McGowan の補題 [MG-93], Lemma 2.3 を用いる．これは，$\lambda_k'^{(p)}$ と $\lambda_k''^{(p)}$ を，それぞれ exact と co-exact p-form に作用する Laplacian の第 k 番目の固有値とする時，次で与えられる．

補題 4.1 (McGowan [MG-93]). (M^m, g) を連結，向き付けられた m 次元の閉 *Riemann* 多様体とする．$\{U_1, U_2\}$ を M の開被覆とし，これに従属する 1 の分割を $\{\rho_1, \rho_2\}$ とする．今，$n_p := \dim H^{p-1}(U_{12}; \mathbb{R})$ と置く（ただし，$U_{12} := U_1 \cap U_2$ ）．この時，*exact p-form* に作用する *Laplacian* の固有値 $\lambda_{n_p+1}'^{(p)}(M, g)$ は

$$
\lambda_{n_p+1}'^{(p)}(M, g) \geq \cfrac{1}{8\left(\cfrac{C_g(\rho)}{\nu_1'^{(p-1)}(U_{12}, g)} + 2\right)\left(\cfrac{1}{\nu_1'^{(p)}(U_1, g)} + \cfrac{1}{\nu_1'^{(p)}(U_2, g)}\right)}
$$

と評価される．ただし，$\nu_1'^{(p)}$ は *absolute boundary condition* を満たす *exact p-form* に作用する *Laplacian* の正の第 1 固有値を表し，

$$C_g(\rho) := \max_{i=1,2} \max_{x \in U_i} \{ |d\rho_i|_g^2(x) \}$$

とする．

さて，証明に入ろう．計量 g_N, g_W は，境界の collar 近傍 $\partial N \times [0, r_1)$ と $\partial W \times [0, s_1)$ 上直積的なので，各々の計量は

$$g_N \;=\; g_{\partial N} \oplus dr^2,\ g_W = g_{\partial W} \oplus ds^2$$

と書ける．ただし，r と s は，$[0, r_1)$ と $[0, s_1)$ の座標である．

次に，M の開被覆 $\{U_1, U_2\}$ を

$$\begin{aligned} U_1 &:= M_1 \cup (\partial M_2 \times [0, s_1)), \\ U_2 &:= M_2^\circ \end{aligned}$$

と取り（M_2° は M_2 開核を表す），この開被覆に従属した 1 の分割 $\{\rho_i\}_{i=1,2}$ を以下のように取る：

$$\rho_1 \;=\; \begin{cases} 1 & \text{on } M_1, \\ 0 & \text{on } M_2 \setminus \partial M_2 \times [0, s_1). \end{cases}$$

そして，ρ_1 は $\partial M_2 \times [0, s_1]$ 上で座標 s のみの関数とする．また，$\rho_2 := 1 - \rho_1$ と取る．

まず，$n_p = 0$ であることが分かる．実際，Künneth の公式と条件 (2) より，

$$H^{p-1}(U_1 \cap U_2; \mathbb{R}) \;\cong\; H^{p-1}(F \times Z; \mathbb{R}) \cong \sum_{a+b=p-1} H^a(F; \mathbb{R}) \otimes H^b(Z; \mathbb{R}) \cong 0$$

となるからである．

さて，$\lambda_1'^{(p)}(M, g_\varepsilon) \to \infty$ $(as\, \varepsilon \to \varepsilon)$ を示すためには，補題 4.1 より次 3 つのことを示せば十分である．

補題 4.2. ε によらない定数 $C_1, C_2, C_3 > 0$ が存在して，

(a) $\quad \nu_1'^{(p)}(U_1, g_\varepsilon) \geq C_1\, \varepsilon^{-2}$,
(b) $\quad \nu_1'^{(p)}(U_2, g_\varepsilon) \geq C_2\, \varepsilon^{-2}$,
(c) $\quad \dfrac{C_{g_\varepsilon}(\rho)}{\nu_1'^{(p-1)}(U_{12}, g_\varepsilon)} \leq C_3.$

証明の詳細は省略するが，固有値の評価については，各 U_i と U_{12} が Riemann 多様体として直積なので，条件 (2), (3) より，第 1 章の例 2 と同様の議論から分かる．また，$C_{g_\varepsilon}(\rho)$ の評価は，1 の分割の取り方から直ぐに分かる．□

こうして，補題 4.1，4.2 より，$\lambda_1'^{(p)}(M, g_\varepsilon) \geq C'\, \varepsilon^{-2}$ が分かった．

最後に，Hodge duality $\lambda_1''^{(p)} = \lambda_1'^{(m-p)}$ を用いると，条件 (1), (2), (3) の下では

$$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \geq C''\, \varepsilon^{-2},$$

すなわち，大きい固有値の存在が分かる．□

5　定理 2.1, 2.2 の証明 —後半—

この章では，定理 2.1, 2.2 の証明の後半，すなわち，固有値の一様有界性を示す．証明は，次の 3 つの場合に分けて行う：

(a) 条件 (1) を満たさない;
(b) 条件 (1) は満たすが，(2) は満たさない;
(c) 条件 (1) は満たすが，(3) は満たさない．

(a) **の証明．** 始めに，互いに交わらない (N, g_N) 内の閉領域 $\{U_i\}_{i=1}^{b_p+1}$ を取る．ここで， $b_p = b_p(M)$ である．今，Dirichlet 条件（つまり，境界で 0 ）を満たす p-form に作用する Laplacian の第 1 固有値を $\tilde{\mu}_1^{(p)}$ と書く．境界値問題の一意性より，いつでも $\tilde{\mu}_1^{(p)} > 0$ である（cf. [A-89]）．この時，min-max 原理より，

$$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \leq \max_{i=1,\dots,b_p+1} \{\tilde{\mu}_1^{(p)}(F \times U_i, g_\varepsilon)\}$$

が分かる．

さて，$p \leq n$ の場合，固有値に対する Künneth の公式から，

$$\tilde{\mu}_1^{(p)}(F \times U_i, g_\varepsilon) \;\; \leq \;\; \lambda_0^{(0)}(F, \varepsilon^2 g_F) + \tilde{\mu}_1^{(p)}(U_i, g_N) = \tilde{\mu}_1^{(p)}(U_i, g_N)$$

が分かる．ゆえに，$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon)$ の有界性が分かる．なお，$r \leq p$ の場合は，Hodge duality から有界性が分かる．

(b) **の証明．** 場合 (b) は，$n < p < r$ かつ，ある $p - n \leq q_0 \leq p$ となる q_0 が存在して，$H^{q_0}(F; \mathbb{R}) \neq 0$ である．よって，$(F, \varepsilon^2 g_F)$ 上に harmonic q_0-form が存在するので，Künneth の公式より，

$$\tilde{\mu}_1^{(p)}(F \times U_i, g_\varepsilon) \;\; \leq \;\; \lambda_0^{(q_0)}(F, \varepsilon^2 g_F) + \tilde{\mu}_1^{(p-q_0)}(U_i, g_N) = \tilde{\mu}_1^{(p-q_0)}(U_i, g_N)$$

と有界性が分かる．こうして，(b) の場合の証明が終わった．

最後に (c) の場合だが，証明は少し複雑である．

(c) **の証明．** $n \geq 2$ で考えればよい．場合 (c) は次と同値である：$n < p < r$ かつ，ある $p - n + 1 \leq q_0 \leq p$ となる q_0 が存在して，$H^{q_0}(W; \mathbb{R}) \neq 0$ あるいは，$H^{q_0}(W, \partial W; \mathbb{R}) \neq 0$ である．今 $(r{+}1)$ 次元のコンパクトな領域 $U := (F \times [0, r_1]) \cup_\partial W$ を取ると，$U \cong W$ （微分同相）である．境界つきの de Rham-Hodge-Kodaira 理論より，$H^{q_0}(W; \mathbb{R}) \neq 0$（あるいは， $H^{q_0}(W, \partial W; \mathbb{R}) \neq 0$ ）であれば， $(U, g_{U,\varepsilon})$ 上に absolute (あるいは，relative) 条件を満たす非自明な harmonic q_0-form φ_ε が存在する．ただし，

$$g_{U,\varepsilon} := \begin{cases} \varepsilon^2 g_F \oplus dr^2 & \text{on } F \times [0, r_1], \\ \quad \varepsilon^2 g_W & \text{on } \; W. \end{cases}$$

特に，φ_ε は U 上で $d\varphi_\varepsilon \equiv 0$ かつ $\delta_{g_{U,\varepsilon}} \varphi_\varepsilon \equiv 0$ を満たす．

$\dim Z = n-1 \geq 1$ なので，Z 上 (b_p+1) 個の 0 でない $(p-q_0)$-forms $\psi_1, \ldots, \psi_{b_p+1}$ で，$\mathrm{supp}(\psi_i) \cap \mathrm{supp}(\psi_j) = \emptyset$ if $i \neq j$ となるような物が取れる．今，M 上の滑らかな cut-off function χ を以下を満たすように取る：

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{on } (F \times [0, \frac{r_1}{2}] \times Z) \cup M_2, \\ 0 & \text{on } M_1 \setminus (F \times [0, r_1) \times Z) \end{cases}$$

かつ，χ は $F \times [0, r_1] \times Z$ 上の区間の座標 r にのみ依存する関数である．このとき，ε によらないある定数 $C \geq 1$ が存在して，

$$|d\chi|^2_{g_\varepsilon} \leq C \tag{5.1}$$

となる．

さて，M 上の C^∞ p-form $\omega_{\varepsilon,i}$ を

$$\omega_{\varepsilon,i} := \begin{cases} \chi\,\varphi_\varepsilon \wedge \psi_i & \text{on } U \times Z, \\ \quad 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と定める．すると，$\mathrm{supp}(\omega_{\varepsilon,i}) \cap \mathrm{supp}(\omega_{\varepsilon,j}) = \emptyset$ if $i \neq j$ なので，線型部分空間 $E_\varepsilon := \langle \omega_{\varepsilon,1}, \ldots, \omega_{\varepsilon,b_p+1} \rangle_{\mathbb{R}} \subset H^1(\Lambda^p M, g_\varepsilon)$ は (b_p+1) 次元である．ゆえに，min-max 原理により，

$$\lambda_1^{(p)}(M, g_\varepsilon) \;\leq\; \max_{i=1,\ldots,b_p+1} \left\{ \frac{\|d\omega_{\varepsilon,i}\|^2_{L^2(M,g_\varepsilon)} + \|\,\delta_{g_\varepsilon} \omega_{\varepsilon,i}\|^2_{L^2(M,g_\varepsilon)}}{\|\omega_{\varepsilon,i}\|^2_{L^2(M,g_\varepsilon)}} \right\} \tag{5.2}$$

が分かる．

我々は (5.2) の右辺を上から一様に評価したい．まず，(5.2) の分母は

$$\|\omega_{\varepsilon,i}\|_{L^2(M,g_\varepsilon)} \geq \{\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,\frac{r_1}{2}],\,\varepsilon^2 g_F \oplus dr^2)} + \|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(W,\varepsilon^2 g_W)}\} \|\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}. \tag{5.3}$$

次に，(5.2) の分子の第 1 項を $d\varphi_\varepsilon \equiv 0$ に注意して計算すると，

$$\begin{aligned} \|d\omega_{\varepsilon,i}\|^2_{L^2(M,g_\varepsilon)} &= \|d(\chi\,\varphi_\varepsilon \wedge \psi_i)\|^2_{L^2(F\times[0,r_1]\times Z, g_\varepsilon)} + \|d(\varphi_\varepsilon \wedge \psi_i)\|^2_{L^2(W\times Z, \varepsilon^2 g_W \oplus g_Z)} \\ &\leq 2C\{\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,r_1],\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)} + \|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(W,\varepsilon^2 g_W)}\} \\ &\qquad \{\|\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)} + \|d_Z \psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

最後に，(5.2) の分子の第 2 項を評価する．始めに，$\delta_{g_{U,\varepsilon}} \varphi_\varepsilon \equiv 0$ と (5.1) より，

$$|\,\delta_{g_{U,\varepsilon}}(\chi\,\varphi_\varepsilon)|_{g_{U,\varepsilon}} \leq |d\chi \wedge *_{g_{U,\varepsilon}}(\varphi_\varepsilon)|_{g_{U,\varepsilon}} + |\chi d *_{g_{U,\varepsilon}}(\varphi_\varepsilon)|_{g_{U,\varepsilon}} \leq \sqrt{C}|\,\varphi_\varepsilon\,|_{g_{U,\varepsilon}}.$$

これより，

$$\begin{aligned} \|\,\delta_{g_\varepsilon} \omega_{\varepsilon,i}\|^2_{L^2(M,g_\varepsilon)} &= \|\,\delta_{g_\varepsilon}(\chi\,\varphi_\varepsilon \wedge \psi_i)\|^2_{L^2(F\times[0,r_1]\times Z, g_\varepsilon)} + \|\,\delta_{g_\varepsilon}(\varphi_\varepsilon \wedge \psi_i)\|^2_{L^2(W\times Z, g_\varepsilon)} \\ &\leq 2C\{\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,r_1],\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)} + \|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(W,\varepsilon^2 g_W)}\} \\ &\qquad \{\|\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)} + \|\,\delta_Z\,\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

その結果，(5.3)，(5.4)，(5.5) を (5.2) に代入すると，

$$\lambda_1^{(p)}(M,g_\varepsilon) \le 4C\,\frac{\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,r_1],\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)}+\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(W,\varepsilon^2 g_W)}}{\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,\frac{r_1}{2}],\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)}+\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(W,\varepsilon^2 g_W)}}$$
$$\max_{i=1,\dots,b_p+1}\left\{\frac{\|\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}+\|d_Z\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}+\|\,\delta_Z\,\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}}{\|\psi_i\|^2_{L^2(Z,g_Z)}}\right\}$$

である．ここで，$\lambda_1^{(p)}(M,g_\varepsilon)$ の一様有界性を言うためには，harmonic form φ_ε に関する次の L^2 a priori estimate を示せばよい：

$$\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,r_1],\,\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)} \le 2\|\,\varphi_\varepsilon\,\|^2_{L^2(F\times[0,\frac{r_1}{2}],\,\varepsilon^2 g_F\oplus dr^2)}.$$

これは，φ_ε が境界条件を満たす harmonic form であることから従う．ここでは証明が長くなるので省略するが，証明のアイデアは Bär [B-96], Proposition 5.1 の方法より，φ_ε の cylinder 部分のノルムが境界から単調増加することを示せばよい．詳細は論文 [T-05a] を参照して戴きたい．

以上より，固有値 $\lambda_1^{(p)}(M,g_\varepsilon)$ の有界性が従う． □

6 固有値の gap と長さが一定の harmonic forms

閉 Riemann 多様体 (M,g) 上の Laplacian の固有値 $\lambda_1^{(p)}(M,g)$ と $\lambda_1^{(q)}(M,g)$ の差に，どのような幾何学的性質が反映しているのだろうか？

この章では，この問題に対する一つの部分的な解答を与え，その応用として，大きい固有値の非存在定理を与える（系 6.7）．

そもそも，閉多様体 M は $\lambda_1^{(p)}(M,g)$ と $\lambda_1^{(q)}(M,g)$ の差があるような計量 g を許容するであろうか？我々はまず $q=0$ の場合を調べた．すなわち，p-form と関数のそれぞれに作用する Laplacian の第 1 固有値の差（gap）

$$\mathrm{Gap}^{(p,0)}(M,g) := \lambda_1^{(p)}(M,g) - \lambda_1^{(0)}(M,g)$$

が正，0，負となるような計量の存在を調べた．

定理 6.1 ([T-03]). M^m を任意の $m \ge 4$ 次元，連結，向き付けられた閉多様体とする．このとき，すべての $2 \le p \le m-2$ に対して，M 上に 3 種類の計量 g_i $(i=1,2,3)$ が存在して，

$$\begin{array}{lrcl} (1) & \lambda_1^{(p)}(M,g_1) & > & \lambda_1^{(0)}(M,g_1), \\ (2) & \lambda_1^{(p)}(M,g_2) & < & \lambda_1^{(0)}(M,g_2), \\ (3) & \lambda_1^{(p)}(M,g_3) & = & \lambda_1^{(0)}(M,g_3) \end{array}$$

が成立する．

注意 6.2. $p=1$ の場合も同様の主張が成立する．ただし，Δ と d が可換なことから常に $\lambda_1^{(1)} \le \lambda_1^{(0)}$ なので，(2), (3) が成立する計量が存在する，という主張になる（ [*T-01*], [*T-03*] ）．

こうして，$\mathrm{Gap}^{(p,0)}$ の符号は閉多様体 M の位相不変量では無いことがわかる．

一方，$\mathrm{Gap}^{(p,0)}$ の符号と (M,g) の幾何にはある関係が成立する．実際，もし Ricci 曲率が正の閉 Einstein 多様体に対して $\mathrm{Gap}^{(1,0)} < 0$ であれば，恒等写像は調和写像の意味で弱安定である（[T-01], Theorem 1.3）．また，もし閉 Riemann 多様体が非自明な parallel p-form を許容すれば，$\mathrm{Gap}^{(p,0)} \leq 0$ となる（[T-03], Proposition 1.3）．さらに，parallel form を長さが一定な harmonic form に置き換えた時，同様の主張を得ることが出来た．

定理 6.3 ([T-05b]). *(M,g) を連結，向き付けられた閉 Riemann 多様体で，その p 次 Betti 数 $b_p(M) \geq 1$ とする．もし，すべての harmonic p-form の長さが一定であれば，すべての $k \geq 1$ に対して，*

$$\lambda_k^{(p)}(M,g) \leq \lambda_k^{(0)}(M,g).$$

さらに，等号 $\lambda_1^{(p)}(M,g) = \lambda_1^{(0)}(M,g)$ が成立するための必要十分条件は，$f\varphi$ が (M,g) の第 1 固有 p-form となることである．ただし，f は第 1 固有関数，φ は長さ一定の非自明な harmonic p-form である．

注意 6.4. *parallel form は長さ一定だが，定理 6.3 は上述の [T-03] の命題 1.3 の完全な拡張では無い．実際，我々の定理 6.3 はすべての harmonic form が長さ一定という条件を課しているが， [T-03] の命題 1.3 は一つの parallel form が存在すれば従うからである．*

そこで，すべてとは限らずに，少なくとも一つの harmonic form が長さ一定の場合に興味が沸くが，その場合は次が成立する．

命題 6.5 ([T-05b]). *(M,g) を連結，向き付けられた閉 Riemann 多様体で，$b_p(M) \geq 1$ とする．もし，少なくとも一つの非自明な harmonic p-form の長さが一定であれば，すべての $k \geq 1$ に対して，*

$$\lambda_k^{(p)}(M,g) \leq \lambda_{b_p(M)+k-1}^{(0)}(M,g).$$

定理 6.3 の典型的な例は，等質な閉 Riemann 多様体や，幾何学的に formal な閉 Riemann 多様体がある．ここで，幾何学的に formal とは，任意の harmonic form の外積が再び harmonic form になることである．実際，φ を任意の harmonic form とすると，$*\varphi$ も harmonic form なので，幾何学的 formal の定義より，これらの外積 $\varphi \wedge *\varphi = |\varphi|^2 v_g$ は harmonic form である（ここに，v_g は体積形式である）．ゆえに， $|\varphi|^2$ が harmonic，すなわち，定数となる．幾何学的に formal な多様体については，[H-01], [K-01] が，harmonic form の長さが一定な多様体については，[NV-04] 等が詳しい．

なお，Guerini and Savo [GS-03], [GS-04] は，コンパクト境界つき Riemann 多様体で，$\mathrm{Gap}^{(p,p-1)} = \lambda_1^{(p)} - \lambda_1^{(p-1)}$ の研究を行っている．

次に，上述の固有値の比較の応用として，Cheng [C-75] の $\lambda_k^{(0)}$ の上からの評価 (1.1) と組み合わせれば，p-form の固有値 $\lambda_k^{(p)}$ の上からの評価が得られる．

系 6.6. (M,g) を連結，向き付けられた閉 *Riemann* 多様体で，$b_p(M) \geq 1$ かつ，$\mathrm{Ric} \geq -\kappa^2$，$\mathrm{diam}(M,g) \geq d$ を満たすとする．ただし，$\kappa, d > 0$ は定数．

(1) すべての *harmonic p-forms* の長さが一定であれば，すべての $k \geq 1$ に対して，

$$\lambda_k^{(p)}(M,g) \quad \leq \quad \frac{m-1}{4}\kappa^2 + \frac{c(m)}{d^2}k^2.$$

(2) 非自明な長さが一定の *harmonic p-form* が存在すれば，すべての $k \geq 1$ に対して，

$$\lambda_k^{(p)}(M,g) \quad \leq \quad \frac{m-1}{4}\kappa^2 + \frac{c(m)}{d^2}(b_p(M)+k-1)^2.$$

ここで，$c(m) > 0$ は次元 m にのみ依存する定数である．

これより，長さ一定の harmonic p-form を持つような崩壊列では，p-form の大きい固有値が存在しないことが分かる．

系 6.7. (M^m, g_i) を連結，向き付けられた閉 *Riemann* 多様体の族で，$b_p(M) \geq 1$ かつ，$\mathrm{Ric}_{g_i} \geq -\kappa^2$，$\mathrm{diam}(M,g_i) \geq d$ を満たすとする．ただし，$\kappa, d > 0$ は i によらない定数である．この時，各 i に対して，非自明な長さが一定の *harmonic p-form* が存在すれば，*p-form* の大きい固有値は存在しない：

$$\lambda_1^{(p)}(M,g_i) \quad \leq \quad C(m,\kappa,d,b_p(M)).$$

さて，定理 6.3 と命題 6.5 を示そう．まず，簡単な計算により次の補題が分かる．

補題 6.8. (M,g) を向き付けられた *Riemann* 多様体とする．この時，任意の 1-*form* θ と *p-form* φ に対して，

$$\langle \theta_1 \wedge \varphi, \theta_2 \wedge \varphi\rangle + \langle \theta_1 \wedge *\varphi, \theta_2 \wedge *\varphi\rangle \quad = \langle \theta_1, \theta_2\rangle\,|\,\varphi\,|^2$$

が成立する．ただし，$*$ は *Hodge star operator* である．

定理 6.3 の証明. すべての harmonic p-form は長さ一定なので，harmonic p-form $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{b_p}\}$ $(b_p \geq 1)$ で $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$ となる物が取れる．さて，f_i $(i = 1, \dots, k)$ を i 番目の正規直交な固有関数とする．このとき，p-forms

$$\omega_i := f_i\,\varphi_1 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

に対して，

$$(\omega_i, \varphi_j)_{L^2} = 0, \quad (\omega_i, \omega_j)_{L^2} = \delta_{ij} \tag{6.1}$$

が分かる．ゆえに，線型部分空間 $E := \langle \varphi_1, \dots, \varphi_{b_p}, \omega_1, \dots, \omega_k\rangle_{\mathbb{R}} \subset \Omega^p(M)$ を取ると，$\dim E = k + b_p$ が分かる．よって，min-max 原理より，

$$\lambda_k^{(p)}(M,g) \leq \sup_{\omega \neq 0 \in E}\{\frac{\|d\omega\|_{L^2}^2 + \|\,\delta\,\omega\|_{L^2}^2}{\|\omega\|_{L^2}^2}\} \tag{6.2}$$

が従う．そこで，我々は (6.2) の右辺を上から評価すればよい．任意の E の元 ω を $\omega=\sum_{i=1}^{b_p} a_i\,\varphi_i+\sum_{j=1}^{k} c_j\omega_j$ と書こう．ただし， $a_i, c_j\in\mathbb{R}$ の少なくとも一つは 0 でない定数である．この時，(6.1) より，(6.2) の分母は，

$$\|\omega\|_{L^2}^2=\sum_{i=1}^{b_p} a_i^2\,\mathrm{vol}(M,g)+\sum_{j=1}^{k} c_j^2. \tag{6.3}$$

次に，(6.2) の分子を計算する．φ_j は harmonic なので，

$$\|d\omega\|_{L^2}^2=\|\sum_{j=1}^{k} c_j df_j\wedge\varphi_1\|_{L^2}^2=\sum_{i,j=1}^{k} c_ic_j(df_i\wedge\varphi_1, df_j\wedge\varphi_1)_{L^2}. \tag{6.4}$$

同様にして，$\delta=(-1)^{mp+m+1}*d*$ で，$*$ は等長的なので，

$$\|\,\delta\,\omega\|_{L^2}^2=\|\sum_{j=1}^{k} c_j df_j\wedge*\varphi_1\|_{L^2}^2=\sum_{i,j=1}^{k} c_ic_j(df_i\wedge*\varphi_1, df_j\wedge*\varphi_1)_{L^2}. \tag{6.5}$$

ゆえに，(6.4), (6.5) と補題 6.8 から，分子は

$$\begin{aligned}\|d\omega\|_{L^2}^2&+\|\,\delta\,\omega\|_{L^2}^2\\&=\sum_{i,j=1}^{k} c_ic_j\int_M\{\langle df_i\wedge\varphi_1, df_j\wedge\varphi_1\rangle+\langle df_i\wedge*\varphi_1, df_j\wedge*\varphi_1\rangle\}d\mu_g\\&=\sum_{i,j=1}^{k} c_ic_j\int_M\langle df_i, df_j\rangle\,|\,\varphi_1\,|^2 d\mu_g\\&=\sum_{i,j=1}^{k} c_ic_j\lambda_i^{(0)}(M,g)\,\delta_{ij}\le\lambda_k^{(0)}(M,g)\,\sum_{j=1}^{k} c_j^2\end{aligned} \tag{6.6}$$

となる．その結果，(6.3), (6.6) を (6.2) に代入すれば，$\lambda_k^{(p)}(M,g)\le\lambda_k^{(0)}(M,g)$ が分かる．なお，等号成立に関する証明は省略する． □

最後に，命題 6.5 の証明だが，これは定理 6.3 の場合とほぼ同様に出来る．変更箇所は，min-max 原理の所で用いる test p-forms の空間 E を，$E:=\langle\varphi, f_1\,\varphi,\ldots, f_{b_p+k-1}\,\varphi\rangle_{\mathbb{R}}$, と取ればよい．ただし，$\varphi$ は (M,g) 上に存在する非自明な長さ一定の harmonic p-form であり，f_i は正の第 i 固有関数である． □

参考文献

[A-89] C. Anné, Principle de Dirichlet pour les formes différentielles, Bull. Soc. math. France **117** (1989), 445–450.

[ACGR-03] E. Aubry, B. Colbois, P. Ghanaat and E. A. Ruh, Curvature, Harnack's inequality, and a spectral characterization of nilmanifolds, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 227–246.

[B-96] C. Bär, Metrics with harmonic spinors, Geom. Func. Anal. **6** (1996), 899–942.

[C-75] S.Y. Cheng, Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications, Math. Zeit. **143** (1975), 289–297.

[CC-90] B. Colbois and G. Courtois, A note on the first nonzero eigenvalue of the Laplacian acting on p-forms, Manuscripta Math. **68** (1990), 143–160.

[CC-00] ________, Petites valeurs propres et classe d'Euler des S^1-fibrés, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (4) **33** (2000), 611–645.

[F-95] R. Forman, Spectral sequences and adiabatic limits, Comm. Math. Phys. **168** (1995), 57–116.

[GLP-99] P. B. Gilkey, J. V. Leahy and J. H. Park, Spectral Geometry, Riemannian submersions, and the Gromov-Lawson Conjecture, Studies in Advanced Mathematics, Chapman & Hall/CRC (1999).

[G-80] M. Gromov, Paul Levy's isoperimetric inequality, prepritnt, IHÉS, (1980).

[GS-03] P. Guerini and A. Savo, The Hodge Laplacian on manifolds with boundary, Sém. Théorie Spectrale et Géom. **21** (2003), 125–146.

[GS-04] ________, Eigenvalue and gap estimates for the Laplacian acting on p-forms, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 319–344.

[J-03] P. Jammes, Sur le spectre des fibrés en tore qui s'effondrent, Manuscripta Math. **110** (2003), 13–31.

[J-05] ____, Effondrements de flots riemanniens et petites valeurs propres des formes différentielles, mathDG/0505417, (2005).

[H-01] D. Huybrechts, Products of harmonic forms and rational curves, Doc. Math. **6** (2001), 227–239.

[K-01] D. Kotschick, On products of harmonic forms, Duke Math. J. **107** (2001), 521–531.

[LY-80] P. Li and S.T. Yau, Estimates of eigenvalues of a compact Riemannian manifold, Proc. Symp. Pure Math. **36** (1980), 205–239.

[L-02a] J. Lott, Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space, Duke Math. J. **114** (2002), 267–306.

[L-02b] ____, Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a singular limit space, preprint, math.DG/0201289 (2002).

[L-04] ____, Remark about the spectrum of the p-form Laplacian under a collapse with curvature bounded below, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 911–918.

[MG-93] J. McGowan, The p-spectrum of the Laplacian on compact hyperbolic three manifolds, Math. Ann. **279** (1993), 725–745.

[NV-04] P.-A. Nagy and C. Vernicos, The length of harmonic forms on a compact Riemannian manifold, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 2501–2513.

[SY-00] T. Shioya and T. Yamaguchi, Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound, J. Diff. Geom. **56** (2000), 1–66.

[T-01] J. Takahashi, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and 1-forms, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 307–320.

[T-02] ______, Small eigenvalues on p-forms for collapsings of the even-dimensional spheres, Manuscripta Math. **109** (2002), 63–71.

[T-03] ______, On the gap between the first eigenvalues of the Laplacian on functions and p-forms, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 13–27.

[T-05a] ______, Vanishing of cohomology groups and large eigenvalues of the Laplacian on p-forms, Math. Zeit. **250** (2005), 43-57.

[T-05b] ______, The gap of the eigenvalues for p-forms and harmonic p-forms of constant length, J. Geom. Phys. **54** (2005), 476–484.

[Y-02] T. Yamaguchi, Collapsing 4-manifolds under a lower curvature bound, preprint, (2002).

東北大学大学院情報科学研究科数学教室
〒 987-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 09
e-mail: junya@math.is.tohoku.ac.jp