一般化された連結和の崩壊と Hodge-Laplacian の固有値の収束

高橋淳也
（東北大学情報科学研究科）

本講演は，Colette Anné 氏（フランス，ナント大学）との共同研究 ([AT12], [AT13]) に基づく．

1 序章

スペクトル幾何学における基本的な問題は，Riemann 多様体上の Laplacian や Dirac 作用素などのスペクトル（固有値）に反映される幾何学的情報を解明することである．特に，微分形式に作用する Laplacian (Hodge-Laplacian) $\Delta = d\delta + \delta d$ の場合は，調和積分論により，スペクトルにコホモロジーの情報が反映されることが大きな特徴である．我々は，スペクトルに反映される幾何的情報を知るために，多様体を崩壊や退化させたときのスペクトルの振る舞いから，元の多様体の幾何との関係を調べる．

Riemann 多様体の崩壊の研究では，断面曲率や Ricci 曲率が下から一様に抑えた下で研究するのが一般的だが，Hodge-Laplacian の場合にはそのような一般的な枠組みで議論するには，幾何的にも解析的にも非常に困難である．また，Hodge-Laplacian の場合には，トポロジーの変化を見るのが重要である．従って，一般的な枠組みの考察だけでなく，トポロジーの変化が見やすい状況を調べることも重要である．

以上 2 つの理由から，我々は以下で記す様な，2 つの境界付き多様体の境界での連結和（一般化された連結和）を取り，その一方を潰す変形を考える（Figure 1）．これは，崩壊と退化が混在した状況である．

なお，この方面の関連した研究に [ACP09], [AC95], [Ma06], [Ro08] などがある．

2 問題の設定と主定理

M_1, M_2 を同じ境界 Σ を持つ $m = n+1$ 次元のコンパクト向き付けられた多様体とする．その共通の境界 $\Sigma = \partial M_i$ の次元を $n \geq 2$ とし，その上に 1 つ Riemann 計量 h を固定する．今，(Σ, h) 上の Euclidean cone を $\mathcal{C}(\Sigma)$ とする．すなわち，$\mathcal{C}(\Sigma) = [0,1] \times \Sigma \big/ \{0\} \times \Sigma$ であり，頂点を除いた滑らかな部分では $dr^2 \oplus r^2 h$ の形の計量が入っているとする．ここに，r は区間 $(0,1]$ の座標とする．

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 58J50; Secondary 35P15, 53C23, 58J32.
This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24740034.

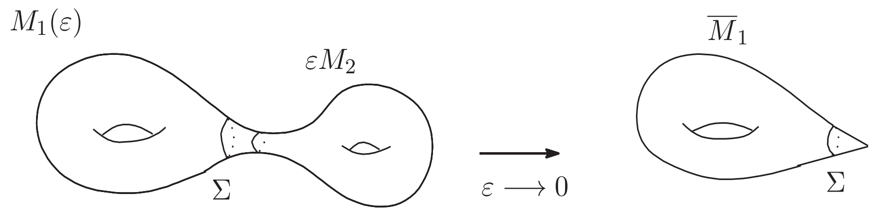

Figure 1: M_ε の崩壊

$\overline{M}_1$ を M_1 に cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ を貼りつけて得られる cone 型特異点を持つコンパクト Riemann 多様体 $\overline{M}_1 = M_1 \cup_\Sigma \mathcal{C}(\Sigma)$ で，Riemann 計量 $\overline{g}_1$ は，cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点を除いた所で $dr^2 + r^2 h$ となるような物とする．

次に，M_2 上の Riemann 計量 g_2 を，境界の近傍 $[0, \frac{1}{2}] \times \Sigma$ において $ds^2 + (1-s)^2 h$ となるように取る．ここで，s は境界からの距離である．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mathcal{C}_{\varepsilon,1}(\Sigma) := \{(r, y) \in \mathcal{C}(\Sigma) \,|\, r > \varepsilon\}$，$M_1(\varepsilon) := M_1 \cup \mathcal{C}_{\varepsilon,1}(\Sigma)$ とし，$(M_1(\varepsilon), g_1)$ と $(M_2, \varepsilon^2 g_2)$ を共通の境界 $(\Sigma, \varepsilon^2 h)$ で貼り合わせた多様体を M_ε とする：

$$M_\varepsilon := (M_1(\varepsilon), g_1) \cup_\Sigma (M_2, \varepsilon^2 g_2).$$

なお，境界の近傍での計量の構成方法より，全体の計量 g_ε は C^∞ 級である．

このとき，我々は，今貼り合わせて得られたコンパクト Riemann 多様体 $M_\varepsilon = (M, g_\varepsilon)$（Figure 1）において，$\varepsilon \to 0$ のとき，Hodge-Laplacian の固有値の極限を決定した．

Main Theorem A. 固有値の極限値が正であれば，その値は $\overline{M}_1$ 上の

$$W \subset \bigoplus_{|\gamma| < \frac{1}{2}} \mathrm{Ker}(A - \gamma)$$

に対応する Hodge-Laplacian $\Delta_{1,W}$ の正の固有値となる．ただし，A は境界 Σ 上のある 1 階の楕円型作用素である（詳細は 3 章）．

閉拡張 $\Delta_{1,W}$ の構成方法は次章で述べるが，$M_1(\varepsilon)$ 部分の極限での Hodge-Laplacian $\Delta_{1,\min}$ は一般に本質的自己共役ではない．すなわち，$D_{1,\min}$ の閉拡張が一意的ではない（[Ch80], [Ch83]）．従って，どのような閉拡張を選べば良いかが問題となるが，その選び方は我々の考えている多様体の族 M_ε の状況による．特に，Σ のトポロジーにも依存する所が大変興味深い．実際，その効果は極限での 0 固有値の存在にも大きく関わる．

Main Theorem B. 固有値の極限での 0 固有値の重複度は，以下で与えられる：

$$\dim \mathrm{Ker}(\Delta_{1,W}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{D}_2) + \dim \mathcal{I}_{\frac{1}{2}}.$$

ただし，$\mathcal{D}_2$ は M_2 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_2 に Atiyah-Patodi-Singer 型の境界条件を課した作用素であり（詳細は 4 章），$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ は $\widetilde{M}_2$ 上の L^2 ではない extented solutions ω で，

$r=1$ に制限したとき，$\mathrm{Ker}(A-\frac{1}{2})$ の成分からなるベクトル空間を表す（Carron [Ca01a]）：

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} := \left\{ \omega(1) \in \mathrm{Ker}(A-\tfrac{1}{2}) \middle| \omega \text{ is an extended solution on } \widetilde{M_2} \right\}.$$

さらに，極限で cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点にノルムが集中するような固有形式が存在することがある．この固有形式の極限は $\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ の元に対応している．これは，我々が初めて明らかにした全く新しい現象である．

3 $\overline{M_1}$ 上の Hodge-Laplacian

本章と次章では，Main Theorem A, B の主張をより正確に述べるため，登場する作用素の定義を中心に述べる．

$\varepsilon \to 0$ のとき，M_ε は，Gromov-Hausdorff の意味で，cone 型特異点を持つ多様体 $\overline{M_1}$ に収束する．しかし，固有値の極限は $\overline{M_1}$ だけの情報では記述できない．実際，潰れてしまう部分 M_2 からの寄与がある．

まず，非崩壊部分 $\overline{M_1}$ については，cone 型特異点付き多様体上の Gauß-Bonnet 作用素 $D_{1,\min}$ の “良い閉拡張” $D_{1,W}$ を選び，極限はその固有値で与えられる．問題は，この “良い閉拡張” の選び方である．

今，cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ から頂点を除いた部分 $(0,1]\times\Sigma$ 上の微分形式を，直積計量を入れた場合への L^2-等長変換を U とする．このとき，コンパクト台を持つ $\overline{M_1}$ 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_1 は

$$U \circ D_1 \circ U^{-1} = \partial_r + \frac{1}{r}A$$

と変数分離型の作用素として書ける．ただし，A は r に依らない (Σ, h) 上の 1 階の楕円型作用素である．特に，A のスペクトル $\mathrm{Spec}(A)$ は重複度が有限の固有値のみからなる．

$\mathrm{Spec}(A) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \emptyset$ のとき，D_1 の閉拡張は一意的（すなわち，$D_{1,\min} = D_{1,\max}$ ）であるが，$\mathrm{Spec}(A) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$ の場合には一意性が崩れる．しかし，その場合の閉拡張は，以下の様にすべて分類できる（Bruning and Seeley [BS88], Lemma 3.2）：

$$\mathcal{L} \ : \ \mathrm{Dom}(D_{1,\max}) \Big/ \mathrm{Dom}(D_{1,\min}) \ \xrightarrow{\sim}\ B := \bigoplus_{|\gamma|<\frac{1}{2}} \mathrm{Ker}(A-\gamma).$$

なお，A は楕円型作用素なので，右辺は有限次元ベクトル空間となり，$D_{1,\min}$ の閉拡張は有限個しかないことが分かる．

さて，任意の部分空間 $W \subset B$ に対して，$D_{1,\min}$ の閉拡張作用素 $D_{1,W}$ の定義域が $\mathcal{L}^{-1}(W)$ となる作用素が一意的に取れる．このとき，Main Theorem A に現れる Hodge-Laplacian の自己共役拡張は $\Delta_{1,W} := D_{1,W}^* \circ D_{1,W}$ で与えられる．すなわち，$\varphi \in \mathrm{Dom}(\Delta_{1,W})$ に対して，$(\Delta_{1,W}\,\varphi, \varphi)_{L^2(\overline{M_1})} = \|D_{1,W}\varphi\|^2_{L^2(\overline{M_1})}$ である．このとき，$\Delta_{1,W}$ のスペクトルは非負の固有値のみからなり，対応する固有形式が $\mathrm{Dom}(\Delta_{1,W})$ 内に取れ，固有空間が有限次元である（Lesch [Le96]）．

Remark 3.1. 通常の連結和の場合，すなわち，$\Sigma = S^n$ のとき，A の固有値は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 内に現れない（我々の前の研究 [AT12] による）．従って，$D_{1,\min}$ の閉拡張は一意的であり，空間 $\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ も 0 である．さらに，小さい固有値も現れない．

4 M_2 上の Gauß-Bonnet 作用素

次に，潰れてしまう部分 $(M_2, \varepsilon^2 g_2)$ の寄与を考える．そのため，スケールを拡大して，潰れる前の状況 (M_2, g_2) を見る．一般に Riemann 計量のスケール変換に対し，固有値には $\lambda_k(\varepsilon^2 g) = \varepsilon^{-2}\lambda_k(g)$ の関係がある．従って，潰れる部分からの寄与は 0 固有値，すなわち，調和形式のみを調べれば良い．

しかし，問題となるのは M_2 の境界条件である．我々の状況では，境界条件が Atiyah-Patodi-Singer [APS75] 型のスペクトル境界条件が必要となる．この条件は，A の $\frac{1}{2}$ 以下へのスペクトル射影を $\Pi_{\leq \frac{1}{2}}$ と書けば，$\Pi_{\leq \frac{1}{2}} \circ U = 0$ と書ける．

このとき，(M_2, g_2) 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_2 で，この境界条件を満たす作用素（の閉拡張）を $\mathcal{D}_2$ と書くと，これは楕円型となる（Carron [Ca01a], [Ca01b]）．特に，調和形式の空間 $\mathrm{Ker}(\mathcal{D}_2)$ は有限次元であり，それが極限の 0 固有値における M_2 部分からの寄与である（Main Theorem B）．

我々は，この境界つき多様体 M_2 上の解析を行う代わりに，無限に伸びた cone $\mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma) = ([1,\infty) \times \Sigma,\, dr^2 + r^2 h)$ を境界に貼り付けた完備 Riemann 多様体 $\widetilde{M}_2 = M_2 \cup_\Sigma \mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma)$ 上で解析を行う．実際，M_2 上の微分形式は，境界 Σ から無限 cone $\mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma)$ に調和拡張して $\widetilde{M}_2$ 上で考えることが出来る（これらの手法は Carron [Ca01a], [Ca01b] による）．詳細は技術的に複雑なので，ここでは割愛する（直接，我々の論文 [AT13] を見て戴きたい）．

5 小さい固有値の存在例

最後に，M_ε が正の小さい固有値（すなわち，0 に収束する固有値）を持つ具体例を与える．

W_i $(i = 1, 2)$ を 2 つの境界つきコンパクト Riemannian 多様体とし，その境界を $\Sigma_i = \partial W_i$ $(\dim \Sigma_i = n_i)$ とする．また，$n := n_1 + n_2 \geq 2$ とおく．このとき，

$$M_1 := W_1 \times \Sigma_2 \quad \text{and} \quad M_2 := \Sigma_1 \times W_2$$

として，2 章で見た様に M_ε を構成すると，

$$M_\varepsilon \cong (W_1 \times \Sigma_2) \cup_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} (\Sigma_1 \times W_2)$$

となる．このとき，境界付き多様体 W_1, W_2 を色々と取り替えることで，様々な崩壊の族 M_ε の具体例が得られる．

さて，この状況で小さい固有値の具体例を見よう．一番基本的な例は，M_ε が m 次元球面 S^m の時である．この場合は，$W_1 := D^{n_1+1}, W_2 := D^{n_2+1}$ $(n_2 \leq n_1)$ と取ることで得られる．実際，$\Sigma_2 = S^{n_2}$ であり，$M = S^{n_1+n_2+1} \cong (D^{n_1+1} \times S^{n_2}) \cup_\partial (S^{n_1} \times D^{n_2+1})$ となる．このとき，極限に現れる 0 固有値を Main Theorem B に従って計算すると，0 固有値が増えていることが分かる．すなわち，球面 S^m 上に n_2-form の小さい固有値の存在が分かる．

Proposition 5.1 (球面の小さい固有値)**.** *m 次元球面 S^m において，任意の次数 p とある Riemann 計量の族 g_ε が存在して，$\lambda_1^{(p)}(S^m, g_\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ となる．*

Remark 5.2. この球面の崩壊で，$p = n_2 = 0$ の場合はいわゆる *Cheeger* のダンベルと呼ばれる物である．従って，この崩壊は *p-form* 版の *Cheeger* のダンベルを与えている．

他にも，球面の直積 $S^{n_1} \times S^{n_2+1}$ やその L 個の連結和 $\sharp_{i=1}^{L} \left(S^{n_1} \times S^{n_2+1}\right)$ 上にも正の小さい固有値が存在する様な Riemann 計量の族が構成できる．

References

[ACP09] C. Anné, G. Carron and O. Post, Gaps in the spectrum of Dirac type operators on non-compact manifolds, Math. Zeit. **262** no. 1 (2009), 57–90.

[AC95] C. Anné et B. Colbois, Spectre du Laplacien agissant sur les p-formes différentielles et écrasement d'anses, Math. Ann. **303** no. 3 (1995), 545–573.

[AT12] C. Anné and J. Takahashi, p-spectrum and collapsing of connected sums, Trans. Amer. Math. Soc. **364** no. 4 (2012), 1711-1735.

[AT13] C. Anné and J. Takahashi, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-de Rham operator, preprint, (2013).

[APS75] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.

[BS88] J. Brüning and R. Seeley, An index theorem for first order regular singular operators, Amer. J. Math. **110** (1988), no. 4, 659–714.

[Ca01a] G. Carron, Un théorème de l'indice relatif, Pacific J. Math. **198** no. 1 (2001), 81–107.

[Ca01b] G. Carron, Théorèmes de l'indice sur des variétés non-compactes, J. reine angew. Math. **541** (2001), 81–115.

[Ch80] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. Symp. Pure. Math. **36**, AMS Providence, RI, (1980), 91–145.

[Ch83] J. Cheeger, Spectral geometry of singular Riemannian spaces, J. Diff. Geom. **18** (1983), 575–657.

[Le96] M. Lesch, Operators of Fuchs type, conical singularitites, and asymptotic methods, Teubner-Texte zur Mathematik 136, Stuttgart (1997), arXiv:dg-ga/9607005.

[Ma06] R. Mazzeo, Resolution blowups, spectral convergence and quasi-asymptotically conical spaces, Actes Colloque EDP, Evian-les-Bains, (2006).

[Ro08] J. Rowlett, Spectral geometry and asymptotically conic convergence, Comm. Anal. Geom. **16** no. 4 (2008), 735–798.

東北大学大学院情報科学研究科数学教室
〒 987-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6–3–09
e-mail: t-junya@math.is.tohoku.ac.jp