2010年4月13日の講義の補足説明

- $\forall x:$実数, $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$
- $x = 1$ とすると $x^2 - x - 1 = -1 < 0$
- $(\forall x : p(x),\ q(x))$ と書くことにより、$p(x)$ を満たす x のみに対して $\forall$ を適用する、ということを表す。
- $(\exists x:$実数, $\quad x^2 - x - 1 > 0)$ であることを確認するためには、例えば $x = 2$ とすればこの不等式が成立する、ということのみ述べれば良い。この命題の否定は $(\exists x:$実数, $\quad x^2 - x - 1 \leq 0)$ ではない（これもまた $x = 0$ とすれば真になっている）。否定は
$$\bigl(\forall x : \text{実数},\quad x^2 - x - 1 \leq 0\bigr)$$
となる。
- 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ の定義は
$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数で}\ n > n_0,\ |a_n - a| < \varepsilon))$$
だが、
$$\forall \varepsilon > 0,\ (\exists n_0 : \text{正整数},\ (\forall n : \text{正整数}, n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon))$$
と書くこともある。
- 定理 A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

  例えば行列
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$
の３次小行列式（４通りある）はすべて 0 であり、２次小行列式は例えば左上隅をとれば
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$
なので、階数は 2 ということがわかる、という意味である。一般に、整数 k に関する条件 $p(k)$ を満たす k の最大値が r とは、
$$p(r) \wedge \Bigl(\forall k > r,\ \overline{p(k)}\Bigr)$$
と書ける。$p(k)$ として「ある k 次の小行列 B があってその行列式が 0 でない」（その否定は $(\forall B : k$ 次の小行列, $\det B = 0)$ となる）という条件をとることで、定理を論理記号を用いて書き表すことができる。