番号 ________________ 名前 ________________ 2010 年 4 月 13 日

定理 1. A を $m \times n$ 行列とする。このとき、$\operatorname{rank} A$ は、A の小行列のうちその行列式が 0 でないようなものの最大次数に等しい。

定理 1 を論理式を用いて表しなさい。

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank} A = r \\
&\iff \left(\boxed{} B : A \text{ の } r \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{} 0 \right) \\
&\qquad \boxed{} \left(\boxed{} k \boxed{} r, \left(\boxed{} B : A \text{ の } k \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{} 0 \right) \right).
\end{aligned}
$$

定理 2. $f(x), g(x)$ を複素数を係数に持つ x の多項式とする。$f(a) = 0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a) = 0$ が成り立てば、$g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。

定理 2 の 2 つ目の文を論理式を用いて表しなさい。ただし、$\Longrightarrow$ は使わないこと。得られた論理式を通常の簡潔な言葉で書き直しなさい。

- 今日の授業の難易度について次の 5 つのうち最も適当なものに○をつけてください。

  ( ) かなり難しく、授業時間内に理解できなかった。

  ( ) やや難しく、復習をしないと理解できていない箇所がある。

  ( ) ほぼ適当で、大体理解できたと思う。

  ( ) やや易しいので、もう少しペースを上げるか詳細な説明まで立ち入らなくて良いと思う。

  ( ) 易すぎるので、これらは仮定してもっと先に進んでほしい。

- 今日の授業の感想、今後の要望などあれば自由に書いてください。

2010年4月13日小テストの解答

定理1.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank} A = r \\
&\iff \left(\boxed{\exists} B : A \text{ の } r \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{\neq} 0\right) \\
&\qquad \boxed{\wedge} \left(\boxed{\forall} k \boxed{>} r, \left(\boxed{\forall} B : A \text{ の } k \text{ 次小行列},\ \det B \boxed{=} 0\right)\right).
\end{aligned}
$$

定理2.

> $f(a)=0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a)=0$ が成り立てば、$g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。

から、まず仮定と結論を抽出して $\implies$ で結ぶと

> ($f(a)=0$ なる任意の複素数 a に対して $g(a)=0$) $\implies$ ($g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる)

さらに、意味を変えずに順序を変えると

> (任意の複素数 a, $f(a)=0 \implies g(a)=0$) $\implies$ (ある正整数 n が存在して $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる)

論理記号を用いて書き換えると

$$(\forall a\text{: 複素数}, f(a)=0 \implies g(a)=0) \implies (\exists n\text{: 正整数}, f(x)|g(x)^n)$$

次に、$p \implies q$ を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

$$\overline{(\forall a\text{: 複素数}, f(a)=0 \implies g(a)=0)} \vee (\exists n\text{: 正整数}, f(x)|g(x)^n)$$

もう一つの $p \implies q$ を $\bar{p} \vee q$ に書き換えて

$$\overline{(\forall a\text{: 複素数}, (f(a)\neq 0) \vee (g(a)=0))} \vee (\exists n\text{: 正整数}, f(x)|g(x)^n)$$

否定を書き換えて

$$(\exists a\text{: 複素数}, (f(a)=0) \wedge (g(a)\neq 0)) \vee (\exists n\text{: 正整数}, f(x)|g(x)^n)$$

これを通常の簡潔な言葉で書き直すと、

> $f(a)=0$ かつ $g(a)\neq 0$ となる複素数 a が存在するか、または $g(x)$ のあるべき $g(x)^n$ が $f(x)$ で割り切れる。