2010年4月20日

通常の言葉で書かれた文を論理式に直すことを前回学んだが、論理式に直すことで意味は明解になったとしても、短くはならない。集合の記号を導入すると意味が明解になると同時に短くもなる。

$$(\forall a\colon \text{複素数},\ f(a)=0 \implies g(a)=0) \implies (\exists n\colon \text{正整数},\ f(x)|g(x)^n)$$

を短く書くために、$\mathbb{N}$ を正整数の集合とし、$Z(f)$ を多項式 f で定まる方程式 $f(x)=0$ の複素数解の集合（f の零点という）とすると、

$$Z(f) \subset Z(g) \implies \exists n \in \mathbb{N},\ f|g^n$$

となる（多項式の変数 x も省略している）。実は $\mathbb{C}[x]$ を複素数係数の x の多項式全体の集合とし、

$$\{h \in \mathbb{C}[x] \mid \exists n \in \mathbb{N},\ f|h^n\}$$

を f の radical といい、$\sqrt{(f)}$ で表すことがある。すると

$$Z(f) \subset Z(g) \implies g \in \sqrt{(f)}$$

と書ける。

集合論の教科書でよくある演習問題：$A \cup B = B \iff A \subset B$ は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned}
(A \cup B = B) &= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \iff q(x)\Big) \\
&= \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longrightarrow q(x)\Big) \wedge \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \Longleftarrow q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{\big(p(x) \vee q(x)\big)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big(\big(p(x) \vee q(x)\big) \vee \overline{q(x)}\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \wedge \Big(p(x) \vee \big(q(x) \vee \overline{q(x)}\big)\Big) \\
&= \Big(\big(\overline{p(x)} \wedge \overline{q(x)}\big) \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \wedge \Big(\overline{q(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(\overline{p(x)} \vee q(x)\Big) \\
&= \Big(p(x) \Longrightarrow q(x)\Big) \\
&= (A \subset B).
\end{aligned}$$

次が成立する。

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i \in I}(A_i \times B)$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i \in I}(A_i \times B)$$

これらを証明するために、一般化された分配法則を用いる。

$$p \vee (\forall i,\ q_i) = \forall i,\ (p \vee q_i), \tag{3}$$
$$p \wedge (\exists i,\ q_i) = \exists i,\ (p \wedge q_i) \tag{4}$$

実際、

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \wedge (y \in B) \\
&\iff (\forall i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B) \\
&\iff \forall i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) && \text{((3) より)} \\
&\iff \forall i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B \\
&\iff (x,y) \in \bigcap_{i\in I} (A_i \times B),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B &\iff \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge (y \in B) \\
&\iff (\exists i \in I,\ x \in A_i) \wedge (y \in B) \\
&\iff \exists i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (y \in B)) && \text{((4) より)} \\
&\iff \exists i \in I,\ (x,y) \in A_i \times B \\
&\iff (x,y) \in \bigcup_{i\in I} (A_i \times B),
\end{aligned}$$

もっと一般に、

$$\bigcap_{i\in I}\left(\prod_{j\in J} A_{i,j}\right) = \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right)$$

が成り立つ。実際、

$$\begin{aligned}
(x_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I} A_{i,j}\right) &\iff \forall j \in J,\ x_j \in \bigcap_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff \forall j \in J,\ (\forall i \in I,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall (i,j) \in I \times J,\ x_j \in A_{i,j} \\
&\iff \forall i \in I,\ (\forall j \in J,\ x_j \in A_{i,j}) \\
&\iff \forall i \in I,\ (x_j)_{j\in J} \in \prod_{i\in I} A_{i,j} \\
&\iff (x_j)_{j\in J} \in \bigcap_{i\in I}\Bigl(\prod_{i\in I} A_{i,j}\Bigr).
\end{aligned}$$

集合 A のベキ集合 2^A とは、A の部分集合全体からなる集合とする。

$$2^A = \{B \mid B \subset A\}$$

例えば、$A = \{1, 2, 3\}$ のとき、

$$2^A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset\}$$

である。$\{1, 2\} \subset A$, $\{1, 2\} \in 2^A$, $\{\{1, 2\}\} \subset 2^A$, $\{\{1\}, \{2\}\} \subset 2^A$ は真であるが $\{1, 2\} \subset 2^A$ は偽である。