2010 年 4 月 27 日提出

1. A_i $(i \in I)$ を集合 X の部分集合の族、B_j $(j \in J)$ を集合 Y の部分集合の族とするとき、

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \times B_j)$$

を証明せよ。

解答例. $(x, y) \in X \times Y$ に対して、

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \\
\iff\ & \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right) \wedge \left(y \in \bigcup_{j \in J} B_j\right) \\
\iff\ & (\exists i \in I,\ x \in A_i) \wedge \left(y \in \bigcup_{j \in J} B_j\right) \\
\iff\ & \exists i \in I,\ \left((x \in A_i) \wedge \left(y \in \bigcup_{j \in J} B_j\right)\right) \\
\iff\ & \exists i \in I,\ ((x \in A_i) \wedge (\exists j \in J,\ y \in B_j)) \\
\iff\ & \exists i \in I,\ (\exists j \in J,\ (x \in A_i) \wedge (y \in B_j)) \\
\iff\ & \exists i \in I,\ (\exists j \in J,\ (x, y) \in A_i \times B_j) \\
\iff\ & \exists i \in I,\ \exists j \in J,\ (x, y) \in A_i \times B_j \\
\iff\ & (x, y) \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \times B_j)
\end{aligned}$$

2. $i, j \in \mathbb{N}$ に対して、集合 $A_{i,j}$ を

$$A_{i,j} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq i - j\}$$

により定義する。このとき、

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}$$

を求めよ。

解答例. $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$x \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} x \geq i - (i - x) & \text{if } i > x, \\ x \geq i - 1 & \text{if } i \leq x \end{cases} \implies \begin{cases} x \in A_{i,i-x} & \text{if } i > x, \\ x \in A_{i,1} & \text{if } i \leq x \end{cases}$$

$$\implies \exists j \in \mathbb{N},\ x \in A_{i,j} \iff x \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$$

だから $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} = \mathbb{Z}.$$

よって

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} = \mathbb{Z}.$$

$j \in \mathbb{N}$ に対して

$$x \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} x < (j + x + 1) - j & \text{if } j > -x, \\ x < 1 - j & \text{if } j \leq -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \notin A_{j+x+1,j} & \text{if } j > -x, \\ x \notin A_{1,j} & \text{if } j \leq -x \end{cases} \implies \exists i \in \mathbb{N},\ x \notin A_{i,j}$$

$$\iff \exists i \in \mathbb{N},\ x \in \overline{A_{i,j}} \iff x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_{i,j}} \iff x \in \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}}$$

だから

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j}} = \mathbb{Z}, \qquad \text{すなわち} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j} = \emptyset.$$

よって

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_{i,j} = \emptyset.$$