2010年4月27日

前回やった直積の定義 $A \times B$, A^n を一般化して B^A を定義する。B^A は A から B への写像全体の集合である。

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} A_{i,j}$$

は成り立たない（宿題参照）。例えば

$$A = \bigcap_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{3} A_{i,j}$$

を考えてみる。$x \in A$ は

$$(\exists j \in \{1,2,3\},\ x \in A_{1,j}) \wedge (\exists j \in \{1,2,3\},\ x \in A_{2,j})$$

と同値である。例えば、$x \in A_{i,j}$ が

$i=1$	F	T	F	T
$i=2$	T	F	F	T

で表されているとき、$i=1$ は1行の $\vee$ をとるので T, $i=2$ は2行の $\vee$ をとるので T これを $i=1,2$ に関して $\wedge$ をとって T となる。一方、

$$B = \bigcup_{j=1}^{3} \bigcap_{i=1}^{2} A_{i,j}$$

とおくと $x \in B$ は

$$(\forall i \in \{1,2\},\ x \in A_{i,1}) \vee (\forall i \in \{1,2\},\ x \in A_{i,2}) \vee (\forall i \in \{1,2\},\ x \in A_{i,3})$$

と同値である。例えば、$x \in A_{i,j}$ が上の表で表されているとき

$j=1$	$j=2$	$j=3$
F	T	F
T	F	F
F	F	F

$j=1$ は1列の $\wedge$ をとるので F, $j=2$ は2列の $\wedge$ をとるので F, $j=3$ は3列の $\wedge$ をとるので F, これを $j=1,2,3$ に関して $\vee$ をとって F となる。

さて、上の A を一般化して

$$A = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j}$$

を考えると $x \in A$ は

$$\exists j \in J,\ x \in A_{i,j}$$

を i に関して「かつ」で結んだものになる。しかしこの j は i によって異なっても良いので、j_i と書くことにすると

$$\forall i \in I,\ (\exists j_i \in J,\ x \in A_{i,j_i})$$

となる。$(j_i)_{i\in I}$ は J^I の元、すなわち I から J への写像と考えることができる。すると $x \in A$ は

$$\exists f \in J^I,\ \forall i \in I,\ x \in \bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$$

となる。したがって

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f\in J^I}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$$

となる。

このことは因数分解と展開の関係と比べてみるとわかりやすい。

$$(a_{11} + a_{12} + a_{13})(a_{21} + a_{22} + a_{23})$$

を展開すると全部で 9 個の項からなる式になる。これは、$i = 1$ について $j = 1, 2, 3$ のどれか j_1、$i = 2$ についても $j = 1, 2, 3$ についてのどれか j_2 を選んで積 $a_{1,j_1}a_{2,j_2}$ を作っているのだから、展開すると $\{1, 2, 3\}^{\{1,2\}}$ に対応して項ができる。一般には

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{f\in J^I}\prod_{i=1}^{m} a_{i,f(i)}$$

となる。ただし $I = \{1, \ldots, m\}$, $J = \{1, \ldots, n\}$ である。

これまで、$\{x \mid p(x)\}$ という形の集合のみ考えてきたが、これでは不便なこともある。例えば、平方数全体の集合を書くには

$$\{x \mid x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ x = y^2\}$$

これをもっと簡単に、

$$\{y^2 \mid y \in \mathbb{N}\}$$

と書くことにする。これより写像の概念に到達する。

x が集合 $\{a, b\}$ に属すとはどういうことか。$x = a$ or $x = b$ ということ。

x が集合 $\{a_1, \ldots, a_n\}$ に属すとはどういうことか。$\exists i \in \{1, \ldots, n\}, x = a_i$ ということ。

y が集合 $\{f(x) \mid p(x)\}$ に属すとはどういうことか。これは $\exists z \in \{x \mid p(x)\}, y = f(z)$ と書ける。特に、$y \in f(X)$ は $\exists z \in X, y = f(z)$ と同値。