

2010年4月27日配布
2010年5月18日提出
2010年5月25日返却

1. $f : A \rightarrow B$ を写像とし、 $Y \subset B$ とするとき、

$$f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) &= \{a \mid a \in A, \boxed{f(a) \in \bigcap_{j \in J} Y_j}\} \\ &= \boxed{\{a \mid a \in A, \forall j \in J, f(a) \in Y_j\}} \\ &= \{a \mid \forall j \in J, (a \in A, f(a) \in Y_j)\} \\ &= \boxed{\{a \mid \forall j \in J, a \in f^{-1}(Y_j)\}} \\ &= \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j). \end{aligned}$$

2. $f : A \rightarrow B$ を写像とし、 $Y \subset B$ とするとき、

$$f(f^{-1}(Y)) = f(A) \cap Y$$

を証明せよ。

$$\begin{aligned} b \in f(f^{-1}(Y)) &\iff \boxed{\exists a \in A, \left((a \in f^{-1}(Y)) \wedge (b = f(a)) \right)} \\ &\iff \exists a, \left((a \in A) \wedge (f(a) \in Y) \wedge (b = f(a)) \right) \\ &\iff \exists a, \left((a \in A) \wedge (b \in Y) \wedge (b = f(a)) \right) \\ &\iff \boxed{\exists a, \left((a \in A) \wedge (b = f(a)) \wedge (b \in Y) \right)} \\ &\iff \boxed{\left(b \in \{f(a) \mid a \in A\} \right) \wedge (b \in Y)} \\ &\iff b \in f(A) \cap Y. \end{aligned}$$