

2010年5月18日

写像 $f: A \rightarrow B$ とは、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を一般化したもので、関数と同様にグラフが定義できる。写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 A を f の定義域といい、

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

を f のグラフという。

写像はそのグラフを定めることによって定めることもできる。写像のグラフ $G \subset A \times B$ は条件

$$\forall a \in A, G \cap (\{a\} \times B) \text{ はちょうどひとつの元からなる} \quad (1)$$

を満たし、逆にこの条件を満たす $G \subset A \times B$ はある写像のグラフである。上の条件(1)を略記するために、 $\exists!$ という記号を用いる：

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G. \quad (2)$$

有限集合とは、

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow X, f \text{ は全単射}$$

を満たす集合 X のこと。このような n を $|X|$ で表す。これを否定したのが無限集合の定義となる。 \mathbb{N} は無限。 \mathbb{N} を含む集合は無限。

$f: A \rightarrow B$ を有限集合 A から B への写像とする。このとき、 f が全射ならば $|A| \geq |B|$ であり、 f が単射ならば $|A| \leq |B|$ である。特に、 f が全単射ならば $|A| = |B|$ である。逆に、 $|A| = |B|$ のとき、 f が単射または全射ならば全単射である。

有限集合に対して次の等式が成り立つ。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A||B|$
- $|A^B| = |A|^{|B|}$
- $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ if $A_i \cap A_j = \emptyset$ whenever $i \neq j$ (disjoint と言う)

X, Y を無限集合とすると、

$$\exists f: X \rightarrow Y, f \text{ は全射} \text{ のとき } |X| \geq |Y|, \quad (3)$$

$$\exists f: X \rightarrow Y, f \text{ は単射} \text{ のとき } |X| \leq |Y|, \quad (4)$$

$$\exists f: X \rightarrow Y, f \text{ は全単射} \text{ のとき } |X| = |Y|, \quad (5)$$

$$\nexists f: X \rightarrow Y, f \text{ は全単射}, |X| \geq |Y| \text{ のとき } |X| > |Y|, \quad (6)$$

$$\nexists f: X \rightarrow Y, f \text{ は全単射}, |X| \leq |Y| \text{ のとき } |X| < |Y| \quad (7)$$

と書く。無限集合 X, Y について $|X|, |Y|$ は現段階では定義されていないことに注意。上は「 $|X| \geq |Y|$ 」「 $|X| \leq |Y|$ 」「 $|X| = |Y|$ 」「 $|X| > |Y|$ 」「 $|X| < |Y|$ 」の定義をしているに過ぎない。したがって、無限集合 $|X|, |Y|$ について、 $|X| \geq |Y| \iff |Y| \leq |X|$ は自明ではない。(3)–(7) は X, Y が有限集合のときも成り立つ。

- シュレーダー・ベルンシュタインの定理： $|X| \geq |Y|$ かつ $|X| \leq |Y|$ ならば $|X| = |Y|$.
- カントールの定理： $|X| < |2^X|$.

これらは X, Y が有限集合のときは明らかに成り立つ。無限集合のときの証明が難しい。

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ をそれぞれ集合 X から Y, Y から Z への写像とする。 f, g がともに全射であれば合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も全射、 f, g がともに単射であれば $g \circ f$ も単射となる。したがって、

- $|X| \geq |Y|$ かつ $|Y| \geq |Z| \implies |X| \geq |Z|$
- $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z| \implies |X| \leq |Z|$

$S \subset A \times B$ のとき、

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{a \in A} |\{b \mid b \in B, (a, b) \in S\}| \\ &= \sum_{b \in B} |\{a \mid a \in A, (a, b) \in S\}| \end{aligned}$$

例えば、 A を正二十面体の面の集合、 B を正二十面体の頂点の集合、とし、 $S \subset A \times B$ を、 $a \in b$ を満たす組 (a, b) 全体とする。各面は正三角形なので、 $|S| = 3|A| = 60$ である。一方、各頂点には5つの正三角形が集まっているので、 $|S| = 5|B|$ である。よって $|B| = 12$ となる。