2010年5月18日配布
2010年5月25日提出
2010年6月1日返却

r を正の整数とし、$A_1, \ldots, A_r$ を有限集合 X の部分集合とする。次の3つの不等式 **1.** **2.** **3.** を r に関する帰納法により示せ。ただし、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1}$$

は自由に用いて良い。

1. $r \geq 1$ に対して、$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \leq \sum_{i=1}^{r} |A_i|$.

$r = 1$ のときは自明。$r \geq 2$ として、$r-1$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{r} A_i| &= |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cup A_r| = |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| \qquad (2) \\ &\leq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i|. \end{aligned}$$

2. $r \geq 2$ に対して、$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \geq \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j|$.

$r = 2$ のときは (1) より明らか。$r \geq 3$ として、$r-1$ で正しいとすると

$$\begin{aligned} |\bigcup_{i=1}^{r} A_i| &= |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i) \cap A_r| && \text{((2) より)} \\ &= |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |\bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \cap A_r)| && (3) \\ &\geq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - \sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| && (\textbf{1.} \text{ より}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{r-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |A_i \cap A_j| + |A_r| - \sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| && \text{(帰納法の仮定より)} \\ &= \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j|. \end{aligned}$$

3. $r \geq 3$ に対して、$|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| \leq \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k|$.

$r = 3$ のときは

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\
&\quad - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}
$$

$r \geq 4$ として、$r - 1$ で正しいとすると

$$
\begin{aligned}
&|\bigcup_{i=1}^{r} A_i| = |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| - |\bigcup_{i=1}^{r-1} (A_i \cap A_r)| && \text{((3) より)} \\
&\leq |\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i| + |A_r| \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| - \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |(A_i \cap A_r) \cap (A_j \cap A_r)| \right) && \text{(\textbf{2.} より)} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{r-1} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \right) + |A_r| && \text{(帰納法の仮定より)} \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^{r-1} |A_i \cap A_r| - \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |(A_i \cap A_r) \cap (A_j \cap A_r)| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r-1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq r-1} |A_i \cap A_j \cap A_r| \\
&= \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq r} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} |A_i \cap A_j \cap A_k|.
\end{aligned}
$$