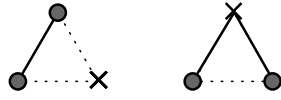


$|A| = k \leq |B| = n$  とする。

$$\begin{aligned}
 \left| \binom{B}{k} \right| &= |\{X \mid X \subset B, |X| = k\}| \\
 &= \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} 1 \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} k! \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{X \subset B \\ |X|=k}} |\{f \mid f: A \rightarrow X \text{ (全単射)}\}| \\
 &= \frac{1}{k!} |\{(X, f) \mid X \subset B, |X| = k, f: A \rightarrow X \text{ (全単射)}\}| \\
 &= \frac{1}{k!} |\{(X, f) \mid X \subset B, f: A \rightarrow B \text{ (単射)}, f(A) = X\}| \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{f: A \rightarrow B \\ \text{単射}}} |\{X \mid X \subset B, f(A) = X\}| \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{f: A \rightarrow B \\ \text{単射}}} 1 \\
 &= \frac{1}{k!} n(n-1) \cdots (n-k+1) \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} .
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
2|G| &= \sum_{T \in G} 2 \\
&= \sum_{T \in G} |\{x \mid x \in T, \boxed{\alpha(T - \{x}, x) \text{ は } x \text{ の知人と } x \text{ の知人でない人からなる}}\}| \\
&= |\{(x, T) \mid (x, T) \in X \times G, x \in T, \alpha(T - \{x}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{T \mid T \in S, x \in T, \alpha(T - \{x}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{T \mid T \in \binom{X}{3}, x \in T, \alpha(T - \{x}, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{P \mid P \in \binom{X - \{x\}}{2}, \alpha(P, x)\}| \\
&= \sum_{x \in X} |\{x \text{ の知人}\} \times \{x \text{ と知人でない人}\}| \\
&= \sum_{x \in X} r_x(n - 1 - r_x) \\
&= - \sum_{x \in X} (r_x^2 - (n - 1)r_x) \\
&= - \sum_{x \in X} \left( \left( r_x - \frac{n-1}{2} \right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4} \right) \\
&\leq \begin{cases} n \frac{(n-1)^2}{4} & n : \text{odd} \\ n \frac{n^2 - 2n}{4} & n : \text{even} \end{cases}
\end{aligned}$$

特に、 $n = 6$  のとき、

$$|S| \leq 6 \frac{6^2 - 2 \cdot 6}{8} = 18 < 20 = \binom{6}{3}$$

$n = 5$  のとき、 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  として、 $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_1)$  が知人で、その他は知人でないとすると、

- (1)  $X$  の中に、互いに知人どうしの 3 人は存在しない。
- (2)  $X$  の中に、互いに知人でない 3 人は存在しない。