2010年6月1日

以下の3つの条件を満たす関係 $R \subset X \times X$ を X 上の同値関係という。

反射律 $\forall a \in X,\, (a,a) \in R$

対称律 $\forall a,b \in X,\, (a,b) \in R \implies (b,a) \in R$

推移律 $\forall a,b,c \in X,\, (a,b) \in R,\, (b,c) \in R \implies (a,c) \in R$

$(a,b) \in R$ のとき、$a \sim b$ などと書くこともある。

反射律、推移律に加えて以下の条件を満たす関係 $R \subset X \times X$ を X 上の順序関係といい、(X,R) を半順序集合という。

反対称律 $\forall a,b \in X,\, (a,b) \in R,\, (b,a) \in R \implies a = b$

(X,R) を半順序集合とし、$(x,y) \in R$ のとき $x \leq y$ と書くことにする。次を仮定する。

$$\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ (x \leq y \implies \{z \mid z \in X,\ x \leq z, z \leq y\} \text{ は有限})$$

例えば、$\mathbb{Z}$ における大小関係、$\mathbb{N}$ における整除など。このような (X,R) に対し、Möbius 関数 $\mu : X \times X \to \mathbb{Z}$ を、次を満たす関数として定義する。

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \not\leq y, \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z) & \text{if } x < y \end{cases}$$

例えば $X = 2^A$ を包含関係に関して半順序集合とみたとき、

$$\mu(B,C) = \begin{cases} (-1)^{|C|-|B|} & \text{if } B \subset C, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また、$X = \mathbb{N}$ を整除に関して半順序集合とみたとき、$\mu(1,n)$ $(n \in \mathbb{N})$ を $\mu(n)$ と略記し、これを単に Möbius 関数ということもある。例えば、$\mu(1) = 1,\, \mu(2) = -1,\, \mu(3) = -1,\, \mu(4) = 0,\, \mu(6) = 1$ より

$$\mu(12) = -(\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(4) + \mu(6)) = 0.$$

再び一般に、(X,R) を有限な半順序集合とする。ゼータ関数 $\zeta : X \times X \to \mathbb{Z}$ を

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とする。μ, ζ をともに行列と考えて、積を計算すると

$$(\mu\zeta)_{x,y} = \sum_{z \in X} \mu(x,z)\zeta(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = \delta_{x,y}$$

従って $\mu\zeta = \zeta\mu = I$ (単位行列)。

定理 1. $f, g : X \to \mathbb{Z}$ が

$$\forall x \in X,\ g(x) = \sum_{y \le x} f(y)$$

を満たすとすると

$$\forall x \in X,\ f(x) = \sum_{y \le x} \mu(y, x) g(y)$$

が成り立つ。

A_i $(i \in I)$ を有限集合 X の部分集合とする。$f : 2^I \to \mathbb{Z}$ を

$$f(J) = |\{a \mid a \in A,\ J = \{j \mid j \in I,\ a \notin A_j\}\}|$$

により定義し、

$$g(J) = \sum_{K \subset J} f(K)$$

とおくと

$$\forall J \in 2^I,\ g(J) = \begin{cases} \left|\bigcap_{j \in \bar{J}} A_j\right| & \text{if } J \neq I, \\ |X| & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となる。これより

$$\left| X - \bigcup_{i \in I} A_i \right| = f(I) = \sum_{J \subset I} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

有限集合の単射の数は順列の数として計算可能であったが、全射の数は複雑である。$|A| = m \geq |B| = n$ とし、$F_b = \{h \mid h : A \to B,\ b \notin h(A)\}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} &|\{h \mid h : A \to B,\ h \text{ は全射 }\}| \\ &= \left| B^A - \bigcup_{b \in B} F_b \right| \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{C \in \binom{B}{i}} (-1)^i |\{h \mid h : A \to B,\ C \cap h(A) = \emptyset\}| \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i (n-i)^m \\ &= n! S(m, n). \end{aligned}$$

ここで、$S(m, n)$ は Stirling number of the second kind という。

$R \subset X \times X$ を同値関係とし、$x \in X$ とするとき、

$$[x] = \{y \mid y \in X,\ (x, y) \in R\}$$

を、（関係 R に関する、）x を含む同値類という。同値類全体の集合

$$\{[x] \mid x \in X\}$$

を関係 R による商集合といい、X/R と書く。$\pi : X \to X/R$, $\pi(x) = [x]$ を自然な写像という。

m を正の整数とし、$\mathbb{Z}$ の関係 R を

$$R = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ m|(a - b)\}$$

とおき、$(a, b) \in R$ のとき $a \equiv b \pmod m$ と書く。これは同値関係になる。

$$X = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid ((a, b), (c, d)) \in X \times X,\ ad = bc\}$$

とおくと、R は X 上の同値関係になる。