$B \subset C \subset A$ のとき、2^A における Möbius 関数 μ の (B,C) での値は、$|C|-|B|$ に関する帰納法により

$$\begin{aligned}
\mu(B,C) &= -\sum_{B\subset D\subsetneq C}(-1)^{|D|-|B|} \\
&= -\sum_{\substack{E\in 2^{C-B}\\ E\neq C-B}}(-1)^{|E|} \\
&= -\sum_{i=0}^{|C-B|-1}\sum_{E\in\binom{C-B}{i}}(-1)^{|E|} \\
&= -\sum_{i=0}^{|C-B|-1}\binom{|C-B|}{i}(-1)^i \\
&= -((1-1)^{|C-B|}-(-1)^{|C-B|}) \\
&= (-1)^{|C-B|}
\end{aligned}$$

写像 $f,g : X \to \mathbb{Z}$ をベクトル $(f(x))_{x\in X},(g(x))_{x\in X} \in \mathbb{Z}^X$ と考えると、行列 $\zeta,\mu\in\mathbb{Z}^{X\times X}$ を用いて $g=f\zeta$ から $g\mu=f$ が得られる。これは

$$\forall x\in X,\ g(x)=\sum_{y\le x}f(y)$$

から

$$\forall x\in X,\ f(x)=\sum_{y\le x}\mu(y,x)g(y)$$

が導かれることを意味している。

$$f(J)=\left|\left\{a \mid \{j\in I \mid a\notin A_j\}=J\right\}\right|$$

$$\begin{aligned}
g(J) &= \sum_{\substack{K\in 2^I\\ K\subset J}} f(K) \\
&= \Big|\bigcup_{\substack{K\in 2^I\\ K\subset J}}\left\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}=K\right\}\Big| \\
&= \left|\left\{a \mid a\in X,\ \{j\in I \mid a\notin A_j\}\subset J\right\}\right| \\
&= \Big|\bigcap_{j\in\overline{J}}A_j\Big|.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Big|X-\bigcup_{i\in I}A_i\Big| =& f(I)\\
=& \sum_{J}\mu(J,I)g(J)\\
=& |X|+\sum_{J\subsetneq I}\mu(J,I)g(J)\\
=& |X|+\sum_{\emptyset\neq J\subset I}\mu(\overline{J},I)g(\overline{J})\\
=& |X|+\sum_{\emptyset\neq J\subset I}(-1)^{|I|-|\overline{J}|}|\bigcap_{j\in J}A_j|\\
=& |X|+\sum_{\emptyset\neq J\subset I}(-1)^{|J|}\Big|\bigcap_{j\in J}A_j\Big|\\
=& |X|+\sum_{k=1}^{|I|}\sum_{J\in\binom{I}{k}}(-1)^{k}\Big|\bigcap_{j\in J}A_j\Big|\\
=& |X|-\sum_{j\in I}|A_j|+\sum_{j\neq k}|A_j\cap A_k|-\dots.
\end{aligned}
$$

$$
\Big|\bigcup_{i\in I}A_i\Big| = \sum_{j\in I}|A_j|-\sum_{j\neq k}|A_j\cap A_k|+\dots.
$$