2010 年 6 月 1 日配布
2010 年 6 月 8 日提出
2010 年 6 月 15 日返却

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ を正整数の集合とし、$R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N},\ a \text{ は } b \text{ の約数}\}$$

とおく。R は順序関係になることを示せ。また、$p_1, \ldots, p_n$ を相異なる素数とし、それらの積 $p_1 \cdots p_n$ を q とおくとき、$\mu(q) = (-1)^n$ となることを示せ。

$a \in \mathbb{N}$ に対して、a は a の約数だから $(a, a) \in R$, よって反射律が成り立つ。

$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ とすると $b = ax$, $c = by$ となる $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $c = axy$ となるので $(a, c) \in R$, よって推移律が成り立つ。

$(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ とすると $b = ax$, $a = by$ となる $x, y \in \mathbb{N}$ が存在する。このとき $a = axy$ となるので $xy = 1$ である。これは $x = y = 1$ を意味するので $a = b$, よって反対称律が成り立つ。

n に関する帰納法により $\mu(p_1 \cdots p_n) = (-1)^n$ を示す。$n = 1$ のとき、$\mu(p_1) = -\mu(1) = -1 = (-1)^1$ だから成り立つ。

$n > 1$ とし、$n - 1$ 以下のとき成り立つとする。q の q 以外の約数は $p_1, \ldots, p_n$ から $n - 1$ 個以下の元を選んで積を作ったものだから、

$$\begin{aligned}
\mu(q) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mu(p_{i_1} \cdots p_{i_k}) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (-1)^k && \text{(帰納法の仮定より)} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k + (-1)^n \\
&= -(1 + (-1))^n + (-1)^n \\
&= (-1)^n.
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{N}$ 上の以下の関係 R が次の性質を持つかどうか決定せよ。

R	反射律	対称律	推移律
$\{(a,b) \mid a < b\}$	×	×	○
$\{(a,b) \mid a+b$ は奇数 $\}$	×	○	×
$\{(a,b) \mid a+b$ は偶数 $\}$	○	○	○
$\{(a,b) \mid ab = 1\}$	×	○	○
$\{(a,b) \mid \sqrt{ab}$ は整数 $\}$	○	○	○

3.

$$X = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$$

とおき、

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid ((a,b),(c,d)) \in X \times X,\ ad = bc\}$$

とおくと、R は X 上の同値関係になることを示せ。

$(a,b) \in X$ とすると、$ab = ba$ より $((a,b),(a,b)) \in R,$ よって反射律が成り立つ。

$((a,b),(c,d)) \in R$ とすると $ad = bc$ より $cb = da$ だから $((c,d),(a,b)) \in R,$ よって対称律が成り立つ。

$((a,b),(c,d)) \in R,\ ((c,d),(e,f)) \in R$ とすると $ad = bc,\ cf = de$ だから

$$\begin{aligned}(ad)f &= (bc)f \\ &= b(cf) \\ &= b(de)\end{aligned}$$

となる。$(c,d) \in X$ より $d \neq 0$ であるから、$af = be$ を得るので、$((a,b),(e,f)) \in R,$ よって推移律が成り立つ。