2010年6月15日配布
2010年6月29日提出
2010年7月6日返却

1.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$$

とし、$a_0 \neq 0$ とする。このとき

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \in \mathbb{R}[[x]]$$

が $fg = 1$ をみたすように $\{b_m\}_{m=0}^{\infty}$ を定めよ。

帰納的に

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0^{-1}, \\ b_k &= -a_0^{-1} \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n} \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

と定義する。このとき

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n b_m x^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} x^k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_0 b_k + \sum_{n=1}^{k} a_n b_{k-n}) x^k \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. $\mathbb{Z}[x]/(x^4+1)$ は整域であるかどうか答えよ。また $\mathbb{Z}[x]/(x^4+x^2+1)$ はどうか。

$\zeta = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ とおく。まず、

$$0 \neq g \in \mathbb{Z}[x],\ \deg g \leq 3 \implies g(\zeta) \neq 0 \tag{*}$$

を示す。実際、

$$\begin{aligned} & g \in \mathbb{Z}[x],\ \deg g \leq 3,\ g(\zeta) = 0 \implies \overline{g(\zeta)} = 0 \implies g(\overline{\zeta}) = 0 \\ & \implies (x-\zeta)|g \text{ and } (x-\overline{\zeta})|g. \end{aligned}$$

そこで、g を $(x-\zeta)(x-\overline{\zeta})$ で割って

$$g = (ax+b)(x-\zeta)(x-\overline{\zeta}) + cx + d$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g(\zeta) = 0 &\implies c\zeta + d = 0, \\ g(\overline{\zeta}) = 0 &\implies c\overline{\zeta} + d = 0 \end{aligned}$$

差をとると $c(\zeta - \overline{\zeta}) = 0$ となるので $c = 0$, よって $d = 0$. したがって

$$\begin{aligned} & g = (ax+b)(x-\zeta)(x-\overline{\zeta}) = (ax+b)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) \\ & \implies b - a\sqrt{2}, a - b\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \implies a = b = 0 \implies g = 0. \end{aligned}$$

以上で (*) が示せた。

さて、$[f_1], [f_2] \in \mathbb{Z}[x]/(x^4+1)$, $[f_1] \neq [0]$, $[f_2] \neq [0]$ とすると、f_1, f_2 を x^4+1 で割った商と余を考えて

$$\begin{aligned} & \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[x],\ 0 \neq \exists g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[x],\ \deg g_1 \leq 3,\ \deg g_2 \leq 3, \\ & f_1 = (x^4+1)q_1 + g_1,\ f_2 = (x^4+1)q_2 + g_2. \end{aligned}$$

すると (*) より

$$\begin{aligned} & g_1(\zeta) \neq 0,\ g_2(\zeta) \neq 0 \\ & \implies g_1g_2(\zeta) \neq 0 \implies f_1f_2(\zeta) \neq 0 \implies x^4+1 \nmid f_1f_2 \\ & \implies [f_1][f_2] \neq [0]. \end{aligned}$$

よって $\mathbb{Z}[x]/(x^4+1)$ は整域である。

$0 \neq [x^2+x+1], [x^2-x+1] \in \mathbb{Z}[x]/(x^4+x^2+1)$, $0 = [x^2+x+1][x^2-x+1]$ だから、$\mathbb{Z}[x]/(x^4+x^2+1)$ は整域ではない。