2010年6月29日配布
2010年7月6日提出
2010年7月20日返却

1. n を正の整数とする。$X \in GL(n,\mathbb{Z})$ ならば X の行列式は ± 1 であることを示せ。

解答例.

$$\begin{aligned}
X \in GL(n,\mathbb{Z}) &\iff X \text{ の成分} \in \mathbb{Z},\ \exists Y \in GL(n,\mathbb{Z}),\ XY = I \\
&\implies \det X \in \mathbb{Z},\ \exists Y; Y \text{ の成分} \in \mathbb{Z},\ \det(XY) = 1 \\
&\implies \det X \in \mathbb{Z},\ \exists Y; \det Y \in \mathbb{Z},\ \det X \det Y = 1 \\
&\implies \det X \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z},\ (\det X)y = 1 \\
&\implies \det X \in \{1,-1\}.
\end{aligned}$$

2. $\max\{o(x) \mid x \in S_7\}$ を求めよ。

解答例.

$x = 2315674$ とすると、$o(x) = 12$ である。なぜなら $x^n(1) = 1 \iff 3|n$, $x^n(4) = 4 \iff 4|n$ となるので $x^n(i) = i \forall i \in \{1,\dots,7\} \implies 12|n$ である。$x^12 = \mathrm{id}$ も確かめられるので $o(x) = 12$ がわかる。同様に考えると例えば $x = 2145673$ なら $o(x) = 10$, $x = 2345671$ なら $o(x) = 7$ のようになり、12 を超えることはないので $o(x)$ の最大値は 12 である。

3. 3次対称群 S_3 と一般線形群 $GL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の間の同型写像をひとつ求め、その対応を下図において線で結んで示せ。

123 •	• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
132 •	• $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
213 •	• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
231 •	• $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
312 •	• $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
321 •	• $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

また、同型写像は全部でいくつあるか。

これは7月6日の講義のときに説明済み。位数2の元がそれぞれの群に3つずつあるので、それらをどのように結んでも同型写像になる。その結び方に応じて位数3の元の結び方を正しく選ぶ必要がある。例えば、

$$213 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 132 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 321 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と結んだ場合、$x = 213$, $y = 132$ とすると $xy = 231$ には

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を対応させなければならない。

また、同型写像は位数2の元の結び方 $6!$ 通りある。