1. (1) 命題 P_1, P_2, Q が T=真、F=偽のいずれかの値をとるとき、次の表の空欄に T または F を書き入れよ。

P_1	P_2	Q	$(P_1 \wedge P_2) \vee Q$	$(P_1 \wedge Q) \vee (P_2 \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	F	F	F

(2) Q を命題とし、A を集合とする。$P(a)$ を A の元 a に関する条件とするとき、

$$(\forall a \in A,\ (P(a) \vee Q)) = ((\forall a \in A,\ P(a)) \vee Q)$$

が成り立つことを、Q の真偽で場合分けをして示せ。

$Q=$T のとき、$P(a) \vee Q =$T だから

$$\text{左辺} = \mathrm{T} = \text{右辺}.$$

$Q=$F のとき、$P(a) \vee Q = P(a)$ だから

$$\text{左辺} = (\forall a \in A,\ P(a)) = \text{右辺}.$$

(3) S を命題とし、A を集合とする。$R(a)$ を A の元 a に関する条件とするとき、

$$(\forall a \in A,\ (R(a) \implies S)) = ((\exists a \in A,\ R(a)) \implies S)$$

が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned}(\forall a \in A,\ (R(a) \implies S)) &= (\forall a \in A,\ (\overline{R(a)} \vee S)) \\ &= ((\forall a \in A,\ \overline{R(a)}) \vee S) && \text{((2) より)} \\ &= (\overline{(\exists a \in A,\ R(a))} \vee S) \\ &= ((\exists a \in A,\ R(a)) \implies S)\end{aligned}$$

2. A を環とし、I を A の空でない部分集合とする。I は次の条件

$$x, y \in I \implies x + y \in I, \tag{1}$$
$$x \in I,\ a \in A \implies ax \in I,\ xa \in I \tag{2}$$

をみたすとする。このとき

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \in I\}$$

は同値関係になることを示せ。また、

$$\begin{aligned} A/R \times A/R &\to A/R \\ ([x], [y]) &\mapsto [xy] \end{aligned}$$

は well-defined であることを示せ。

仮定より $I \neq \emptyset$ より、$\exists z \in I$. A は環だから $0 \in A$ で、(2) より $0z \in I, 0z = 0$ だから

$$0 \in I. \tag{3}$$

また、A は環だから、$1 \in A$. その加法に関する逆元 -1 も A に存在する。すなわち

$$-1 \in A. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\text{反射律: } x \in A &\implies x - x = 0 \in I && ((3) \text{ より}) \\
&\implies (x, x) \in R. \\
\text{対称律: } (x, y) \in R &\implies x - y \in I \\
&\implies (-1)(x - y) \in I && ((2), (4) \text{ より}) \\
&\implies y - x \in I \\
&\implies (y, x) \in R. \\
\text{推移律: } (x, y) \in R,\ (y, z) \in R &\implies x - y \in I,\ y - z \in I \\
&\implies (x - y) + (y - z) \in I && ((1) \text{ より}) \\
&\implies x - z \in I \\
&\implies (x, z) \in R.
\end{aligned}$$

Well-defined であることについては

$$
\begin{aligned}
[x] = [x'],\ [y] = [y'] &\implies x - x' \in I,\ y - y' \in I \\
&\implies (x - x')y \in I,\ x'(y - y') \in I \qquad\qquad ((2)\ \text{より}) \\
&\implies (x - x')y + x'(y - y') \in I \qquad\qquad ((1)\ \text{より}) \\
&\implies xy - x'y' \in I \\
&\implies (xy, x'y') \in R \\
&\implies [xy] = [x'y'].
\end{aligned}
$$

3. $R \subset X \times X$ を X 上の関係とし、

$$\bar{R} = \{(x,x) \mid x \in X\} \cup \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ or } (y,x) \in R\}$$

とおくと、反射律、対称律をみたす。$\tilde{R}$ を、$\bar{R}$ の推移閉包とする。すなわち

$$\tilde{R} = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \exists z_1, z_2, \ldots, z_n \in X,\ (x,z_1),(z_1,z_2),\ldots,(z_n,y) \in \bar{R}\} \\ \cup \bar{R}.$$

a, b を無意味な記号とし、X を a, b からなる有限列全体の集合とする。長さ 0 の列を 1 で表し、これも X の元とする。

$$\begin{aligned} R = {} & \{(xy, xaay) \mid x \in X,\ y \in X\} \\ & \cup \{(xy, xbby) \mid x \in X,\ y \in X\} \\ & \cup \{(xy, x(ab)^5 y) \mid x \in X,\ y \in X\} \end{aligned}$$

とおき、$\bar{R}$ の推移閉包 $\tilde{R}$ を考える。$((ab)^4, ba) \in \tilde{R}$ を示せ。

R の定義より

$$((ab)^4, (ab)^4 aa) \in R, \tag{1}$$
$$((ab)^4 aa, (ab)^4 abba) \in R, \tag{2}$$
$$(ba, (ab)^4 abba) = (ba, (ab)^5 ba) \in R. \tag{3}$$

$\bar{R}$ の定義より

$$((ab)^4, (ab)^4 aa) \in \bar{R}, \qquad \text{((1) より)} \tag{4}$$
$$((ab)^4 aa, (ab)^4 abba) \in \bar{R}, \qquad \text{((2) より)} \tag{5}$$
$$((ab)^4 abba, ba) \in \bar{R}. \qquad \text{((3) より)} \tag{6}$$

(4), (5), (6) と $\tilde{R}$ の定義より $((ab)^4, ba) \in \tilde{R}$.

4. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ を正の整数全体の集合とする。$x \in \mathbb{N}$ に対して、$D(x)$ を x の約数全体の集合とする。$\mu(x) = \mu(1, x)$ を、順序関係 $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ は } y \text{ の約数}\}$ に関する Möbius 関数とする。

(1) $x, y \in \mathbb{N}$ が互いに素とするとき、

$$\begin{aligned} f : D(x) \times D(y) &\to D(xy) \\ (a, b) &\mapsto ab \end{aligned}$$

の逆写像を構成することによって f が全単射であることを示せ。

$g : D(xy) \to D(x) \times D(y)$ を

$$g(c) = (\gcd(x, c), \gcd(y, c)) \quad (c \in D(xy))$$

によって定義すると g は f の逆写像になる。

(2) $x, y \in \mathbb{N}$ が互いに素とするとき、$\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ を xy に関する帰納法で示したい。次の空欄を埋めよ。

$$\begin{aligned} \mu(xy) &= -\sum_{\substack{d \in D(xy) \\ d \neq xy}} \mu(d) \\ &= -\sum_{\substack{a \in D(x) \\ b \in D(y) \\ ab \neq xy}} \mu(ab) && ((1) \text{ より}) \\ &= -\sum_{\substack{a \in D(x) \\ b \in D(y) \\ ab \neq xy}} \mu(a)\mu(b) && (\text{帰納法の仮定より}) \\ &= -\sum_{\substack{a \mid x \\ a \neq x}} \mu(a) \sum_{\substack{b \mid y \\ b \neq y}} \mu(b) - \mu(x) \sum_{\substack{b \mid y \\ b \neq y}} \mu(b) - \mu(y) \sum_{\substack{a \mid x \\ a \neq x}} \mu(a) \\ &= -(-\mu(x))(-\mu(y)) - \mu(x)(-\mu(y)) - \mu(y)(-\mu(x)) \\ &= \mu(x)\mu(y). \end{aligned}$$