

CMRU 研究会「量子確率論と量子ウォーク」

日時 2012/07/04(水)–07/05(木)

場所 東北大学情報科学研究科棟 5F 小講義室

主催 東北大学重点戦略支援プログラム

「数学をコアとするスマート・イノベーション
融合研究共通基盤の構築と展開」

組織委員 瀬川悦生、尾畑 伸明

開催趣旨：非可換な世界を記述する量子確率論で展開される独立性、極限定理、大偏差原理、グラフのスペクトルなどに関する議論と、ランダムウォークの量子的類推から構成され、分野をまたいで盛んに研究されている量子ウォークとのつながりを探る。基本的な概念や成果を相互に確認し、共通の問題意識を得ることで、議論を掘り下げ、深めていく。

7月4日(水) (12:50-18:00)

- 開会 12:50

- 「量子ウォークの定常測度と極限測度」

講演者：今野紀雄 (横浜国立大学) 13:00~14:00

概要：1次元系の離散時間量子ウォークの幾つかのモデルに対して、定常確率振幅、定常測度、時間平均極限確率振幅、時間平均極限測度などの関係について考える。

- 「自由確率論における組合せ論的手法」

講演者：吉田 裕亮 (お茶の水女子大学) 14:10~15:10

概要：自由確率論での分布論において現われる組合せ論的对象、すなわち集合非交叉分割と Dyck 経路がどのような背景で出現するかを全 Fock 空間上の生成・消滅作用素との関連を中心に解説する。さらに、確率分布の q -変形と分割統計、重み付き経路への発展についても紹介したい。

- 「量子ウォークとグラフのゼータ関数」

講演者：佐藤 巖 (小山高等専門学校) 15:30~16:10

概要：グラフ上の離散時間量子ウォークが、グラフの同型問題に有効であることが判明し、いろいろなアプローチが為されている。Emms 達はグラフ上の Grover walk の時間発展を記述する Grover 遷移行列の 3 乗の positive support のスペクトルで、同じパラメータを持つ強正則グラフの同型性が判別できるとの強力な予想を提出し、線形代数的な議論により、Grover 遷移行列とその positive support、Grover 遷移行列の 2 乗の positive support のスペクトルを計算した。また、Ren 達はグラフの Grover 遷移行列の positive support が、伊原ゼータの行列式表示に現れる、edge matrix の転置であることを示した。そこで、我々はグラフの第 2 種重み付きゼータ関数の行列式表示を用い、Grover 遷移行列の特性多項式を導き、直截、Grover 遷移行列のスペクトルを与える。また、伊原ゼータの行列式表示を用い、Grover 遷移行列とその 2 乗の positive support の特性多項式を導き、それらのスペクトルを与

える。さらに、Grover 遷移行列の 3 乗の構造について述べる。

- 「非可換確率論における独立性概念」

講演者：村木 尚文 (岩手県立大学) 16:20~17:00

概要：古典確率論と非可換確率論の著しい違いの一つは、古典確率論においては独立性の概念が一意であるのに対し、非可換確率論においては多様な独立性概念が存在するということである。本講演では、独立性概念の定式化ならびに独立性概念の分類に関する講演者の仕事 (2002,2003) について紹介する。まず、R. Speicher に従い、独立性概念を (非可換) 確率変数たちの混合モーメントに対する普遍計算規則として定式化する。次に、そのような独立性概念はちょうど 5 つ (本質的には 4 つ) だけ存在するという独立性概念の分類定理を紹介する。

- 「ホインの微分方程式を通じた離散時間量子ウォークと連続時間量子ウォークの関係」

講演者：町田 拓也 (明治大学) 17:10~17:50

概要：ランダムウォークの量子版と考えることができる量子ウォークは、最近 10 年で活発に研究されてきた分野である。ランダムウォークの極限分布がガウス分布で記述されるように、量子ウォークに対しても様々な極限分布が導出されてきた。極限分布から抽出される情報はいくつかあるが、今回の発表では、1 次元系の離散時間モデルと連続時間モデルに対する、それぞれの極限分布の密度関数が満たす微分方程式を導出し、その微分方程式の情報から、離散時間モデルと連続時間モデルの関係を議論する。なお、紹介する結果は、論文 [1] にもとづく結果である。

[1] Konno, N., Machida, T., Wakasa, T.: The Heun differential equation and the Gauss differential equation related to quantum walks, *Yokohama Mathematical Journal* (in press), arXiv:1109.2662.

- 懇親会 19:00~

7月5日(木) (10:00-17:00)

- 「逆正弦法則と『量子古典対応』」

講演者：西郷 甲矢人 (長浜バイオ) 10:00~11:00

概要：量子確率論、量子ウォーク、そして古典的な確率論をつらぬいて「普遍的」に現れるひとつの確率法則がある：逆正弦法則である。その現れ方の統一的な理解を目指している過程で、逆正弦法則を極限分布としてもつ、非可換確率論における新しいタイプの極限定理が見出された。しかも、その物理的意味は、量子論の根本問題の一つである「量子古典対応」につながっていた。今回は、この「新しいタイプの極限定理」について述べると共に、量子ウォークとのつながりを模索してみたい。

- 「Symmetry and self-duality in discrete-time quantum walks」

講演者：桂 法称 (学習院大学) 11:10~12:10

概要：量子ウォークはランダムウォークの量子系での類似物として、Aharonov らにより導入されたが、近年はその冷却原子系での実現 [1] やトポロジカル相との関係 [2] などが指摘され、分野を超えた幅広い研究が行われている。我々は、[3] において、準周期系の典型的なモデルである Harper 方程式の量子

ウォークでの対応物と考えられるモデルを定義し解析したのでその結果を紹介する。このモデルでは、コインは各サイトで異なっているため並進対称性が破れているが、自己双対な構造を持っており、双対変換を行うとウォークとコインの役割が入れ替わることが分かる。また、1ステップの時間発展に対応する演算子のスペクトルは、Harper 方程式と同様にフラクタル的な構造を持つ。発表ではこの構造に隠れた対称性 [4] の詳しい解析および局在性に関する結果の紹介を行う。また時間が許せば、物性論での関連する話題、i) 準周期系, ii) マルチフラクタル解析, iii) 平坦バンド系, などについての簡単な紹介と、今後の展開について触れたい。

本発表は鹿野豊氏 (分子研) との共同研究に基づきます。

- [1] M. Karski et al., Science 325, 174 (2009).
- [2] T. Kitagawa et al., Phys. Rev. A 82, 033429 (2010).
- [3] Y. Shikano and H. Katsura, Phys. Rev. E 82, 031122 (2010).
- [4] Y. Shikano and H. Katsura, arXiv:1104.2010v2 [quant-ph].

●「量子酔歩と力学系」

講演者：行木 孝夫 (北海道大学) 13:30~14:10

概要：カオス的力学系をもとに導出されたユニタリ行列によって定義する量子酔歩は内部自由度に関する極限を可能とするように観察できる。極限分布を数値計算によって観察した結果を報告する。

●「あるグラフの積に関する漸近的スペクトル分布について」

講演者：日比野 雄嗣 (佐賀大学) 14:20~15:00

概要：グラフ G の隣接行列 A に対して、

$$A_N^{(k)} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N} \underbrace{I \otimes \dots \otimes I \otimes \overset{(j_1 \text{ 番目})}{A} \otimes I \otimes \dots \otimes I \otimes \overset{(j_k \text{ 番目})}{A} \otimes I \otimes \dots \otimes I}_{N \text{ 個}}$$

とおき、これを隣接行列とするグラフを $G_N^{(k)}$ とする。いろいろな G について、 $G_N^{(k)}$ の漸近的スペクトル分布を求めてみる。

任意の単純グラフ G に対して、 $G_N^{(k)}$ の漸近的スペクトル分布が

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N \left(\left(\frac{A_N^{(k)}}{\sqrt{\binom{N}{k} \kappa(o)^k}} \right)^m \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2^{k/2} k!} H_k \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right)^m \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

となることが予想される。ここで、 $\kappa(o)$ は G の原点の次数、 $H_k(x)$ は k 次 Hermite 多項式である。

●「独立性・母関数・微分方程式」

講演者：長谷部 高広 (京都大学) 15:20~16:00

概要：エルミートな (非可換) 確率変数に対して、状態に依存する確率分布が定まる。一般には、2つのエルミート確率変数の和の確率分布がもともとの2つの確率分布とどう関わっているかは分からない。しかしその2つの確率変数が「独立」である時には、和の確率分布が計算できる。この計算にはモーメント母関数を用いる。さらに「独立同分布な確率変数の和」を考えると、モーメント母関数に関するある微分方程式が導出される。講演では独立性、母関数、微分方程式の関係について解説をしたい。

- 「散乱行列とその周辺」

講演者：樋口 雄介 (昭和大学) 16:10～16:50

概要：量子グラフのひとつの派生の中で見られる「散乱行列」の一般的特徴付けをおこない、量子ウォークのある発展作用素との関係や意味づけを目標とする。

- 閉会 17:00