グラフ理論の深みを覗く

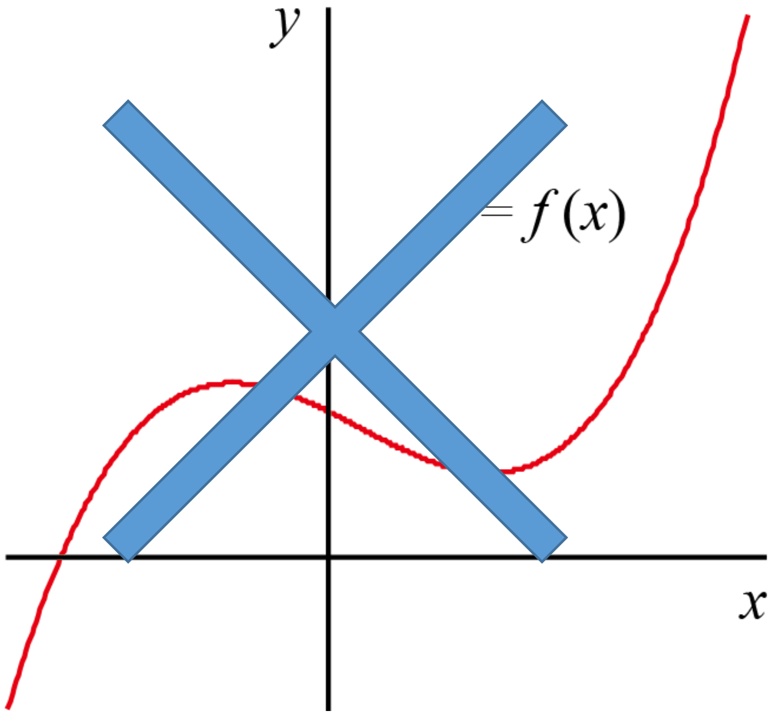
数学の抽象化

果てしない創造力

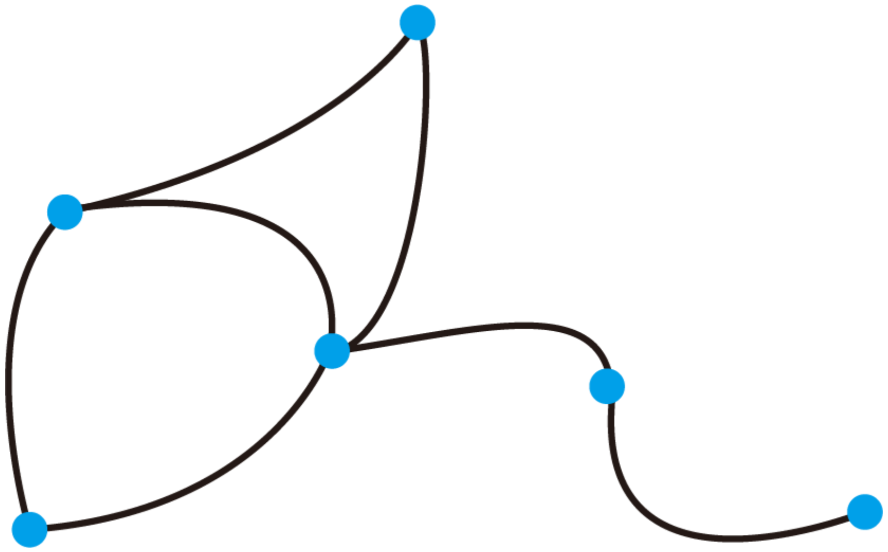
2018.02.18 GSIS

グラフ

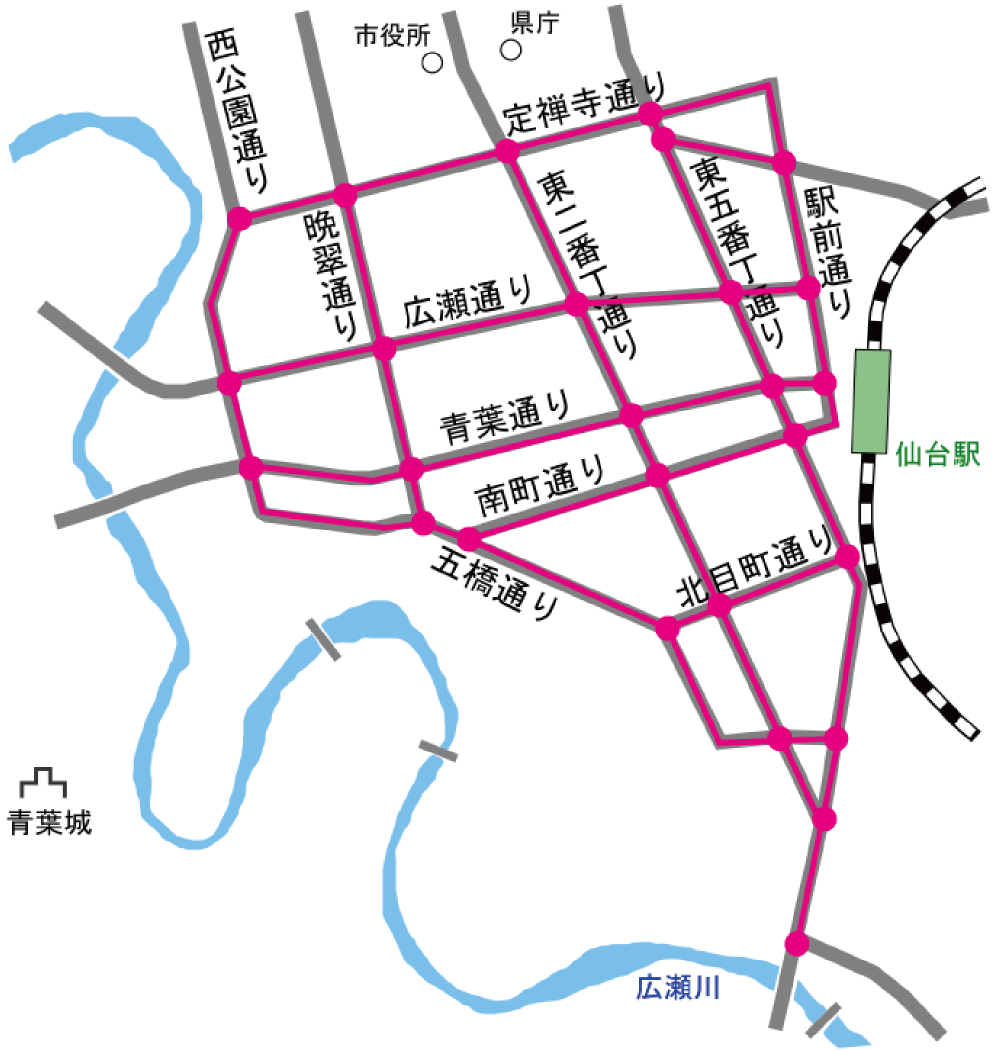
関数のグラフ



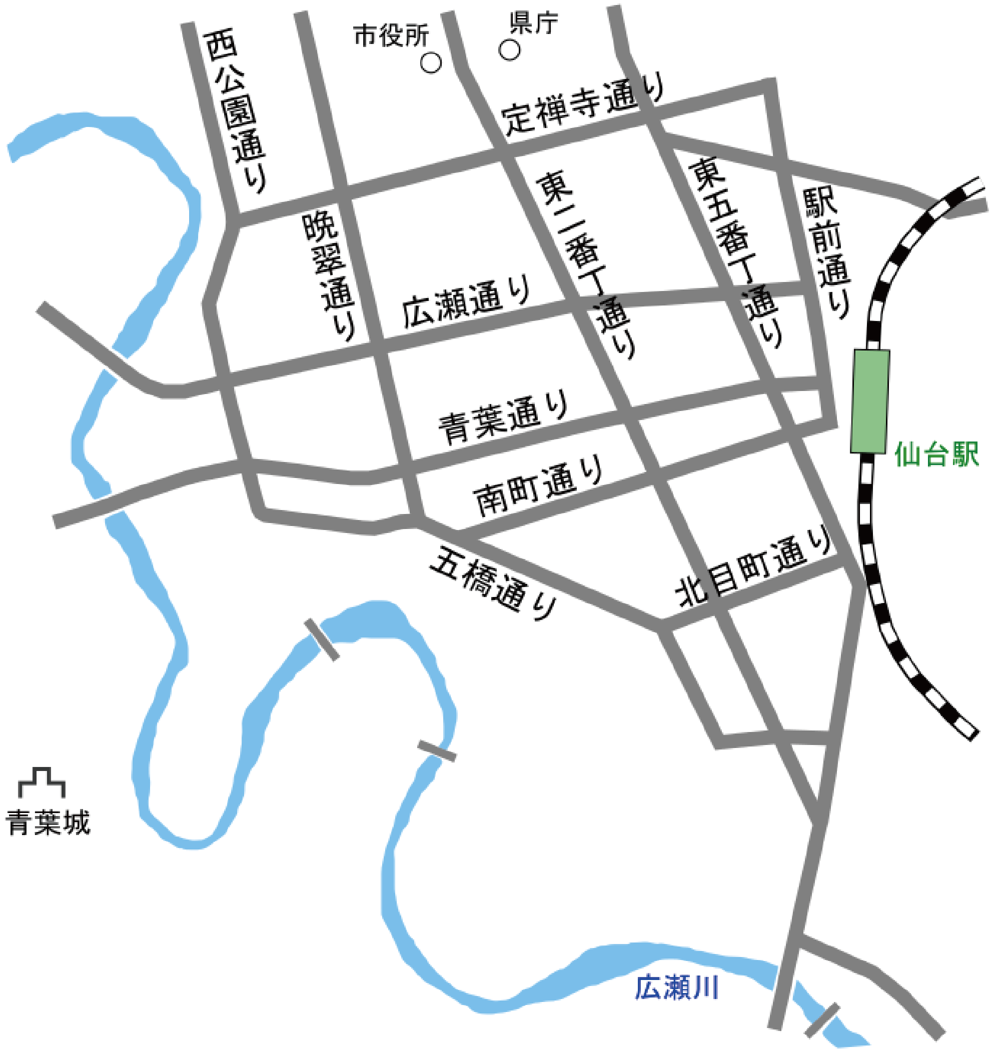
点と線からできた図形

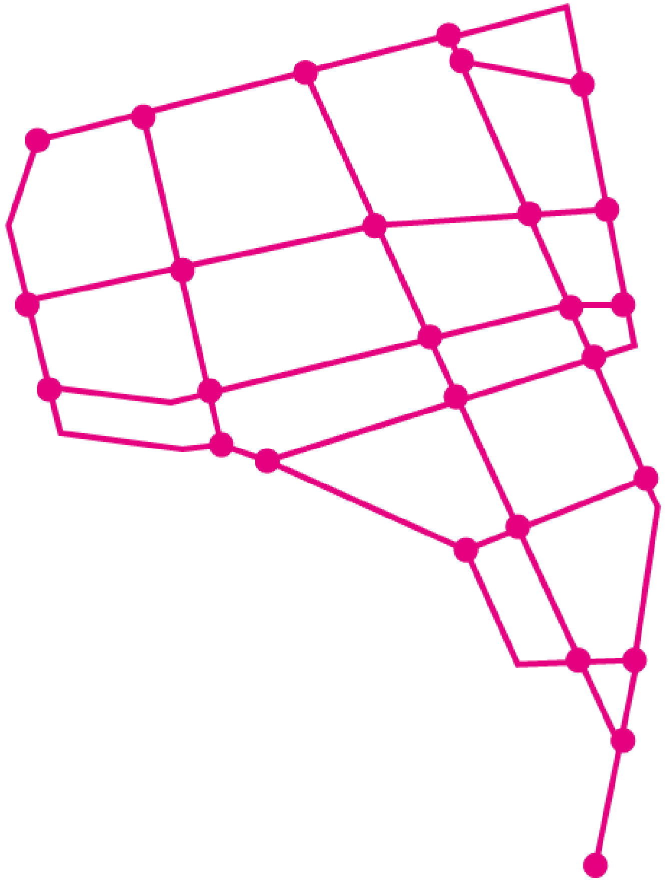


道路網からグラフを取り出す



道路網からグラフを取り出す





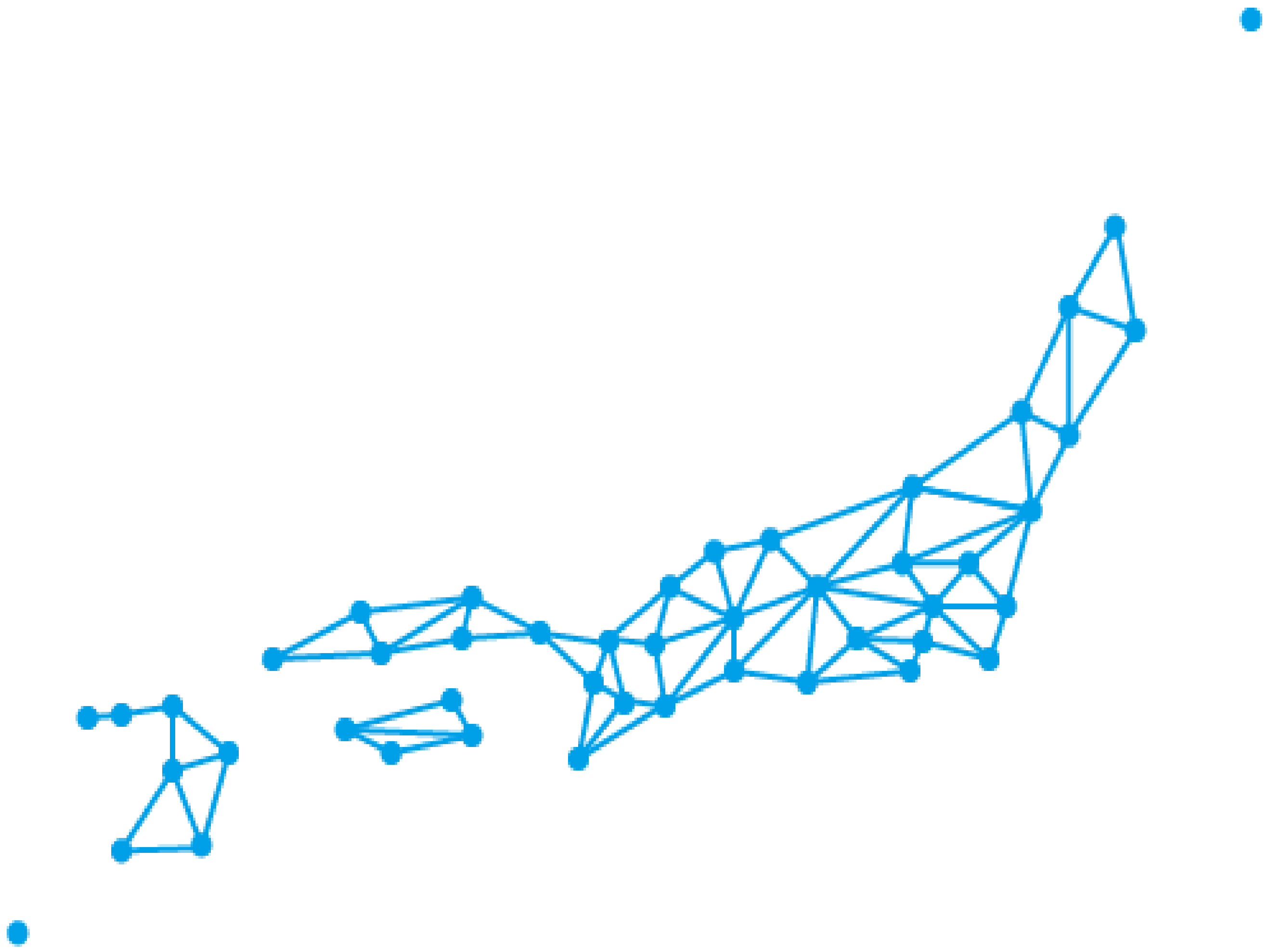
点と点との隣接関係が大事

隣接関係あるところに
グラフあり

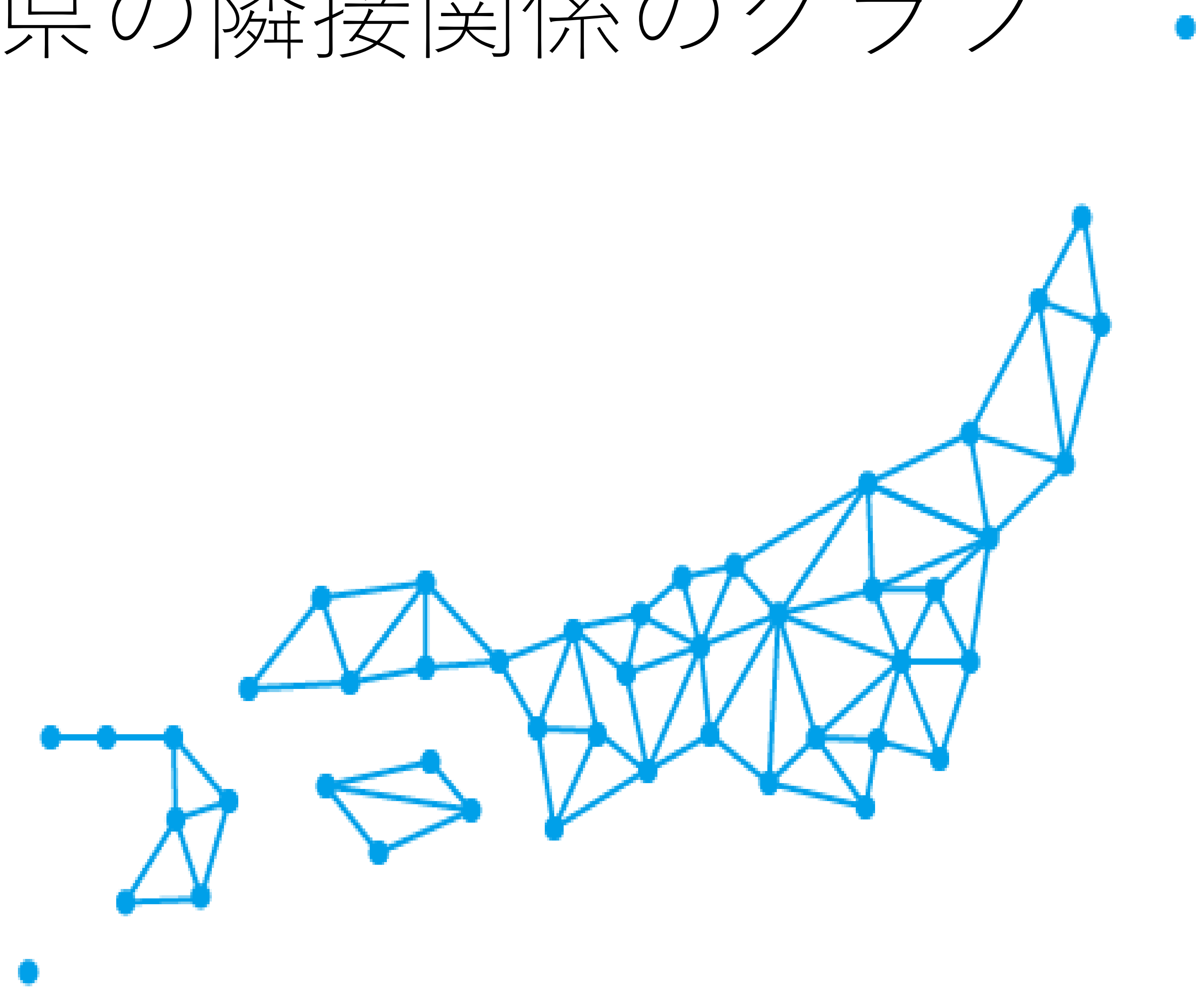
隣接関係あるところに
グラフあり

隣接関係あるところにグラフあり

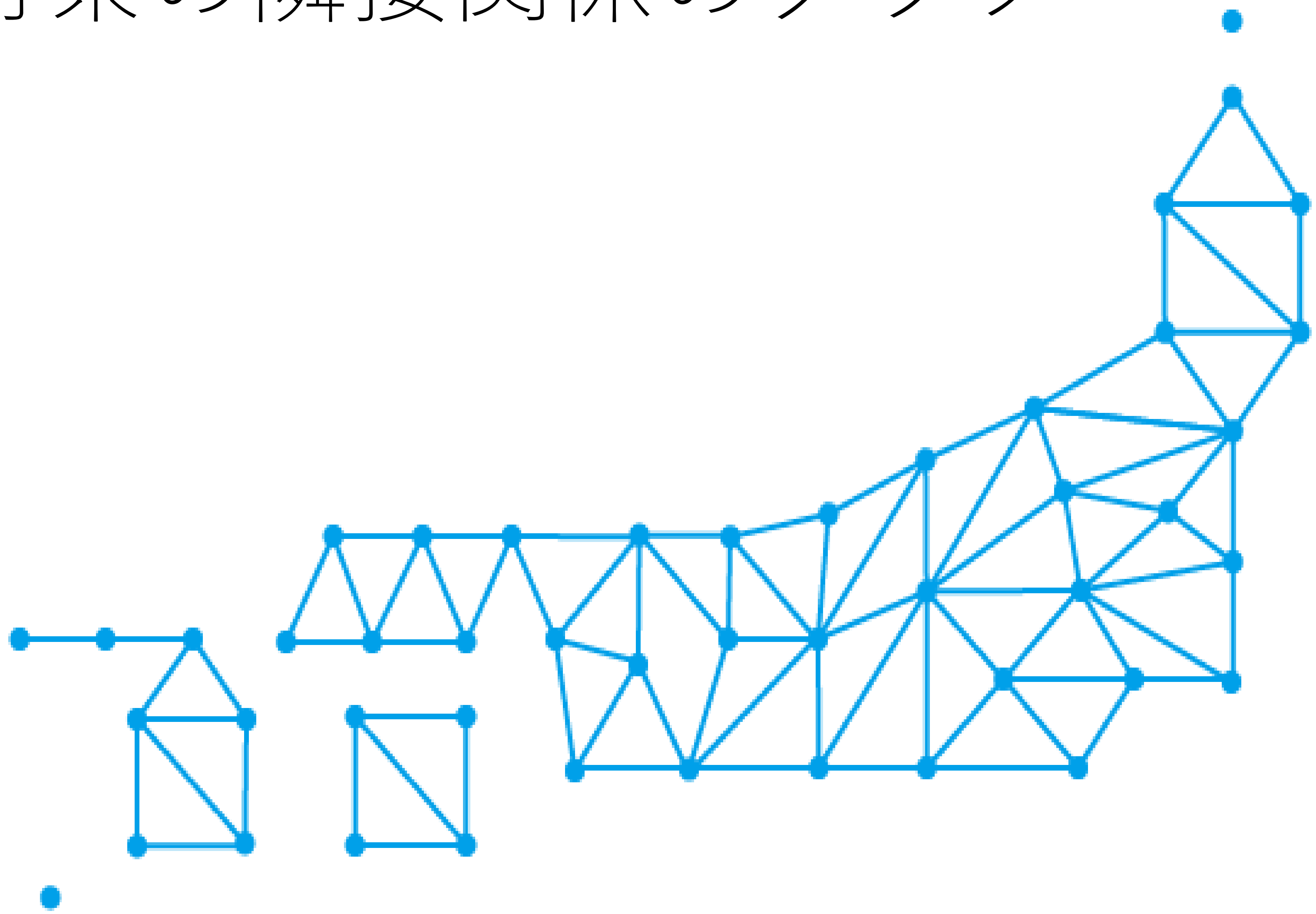
都道府県の隣接関係のグラフ



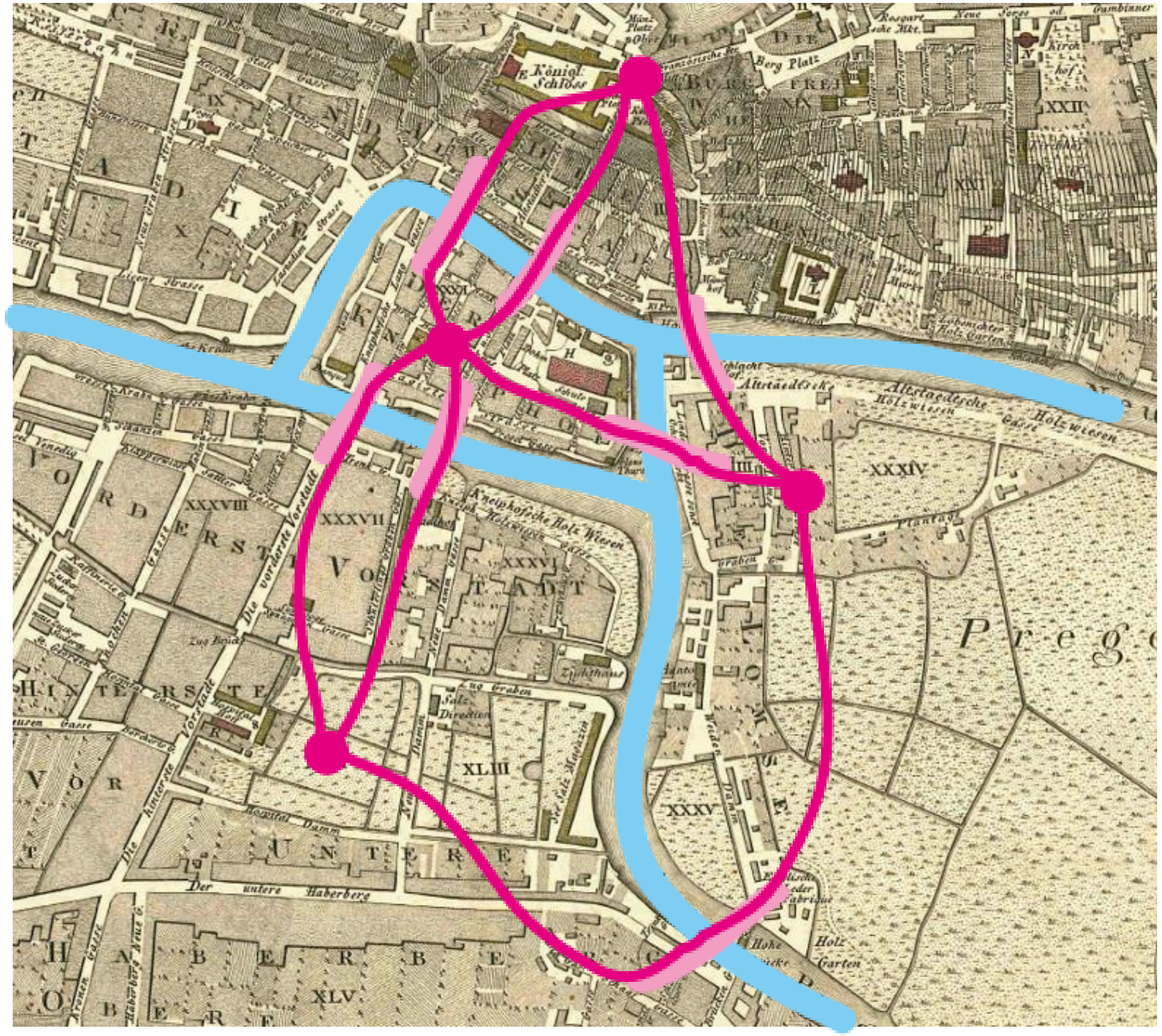
都道府県の隣接関係のグラフ



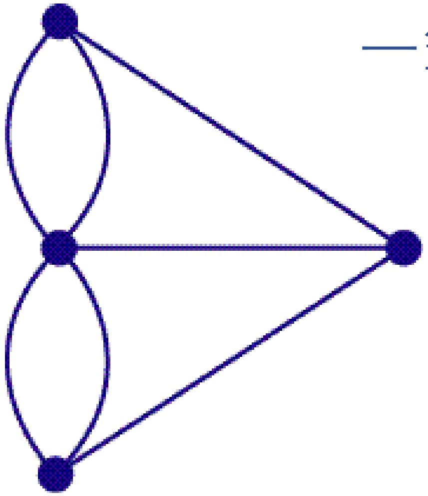
都道府県の隣接関係のグラフ



グラフ理論の始まり



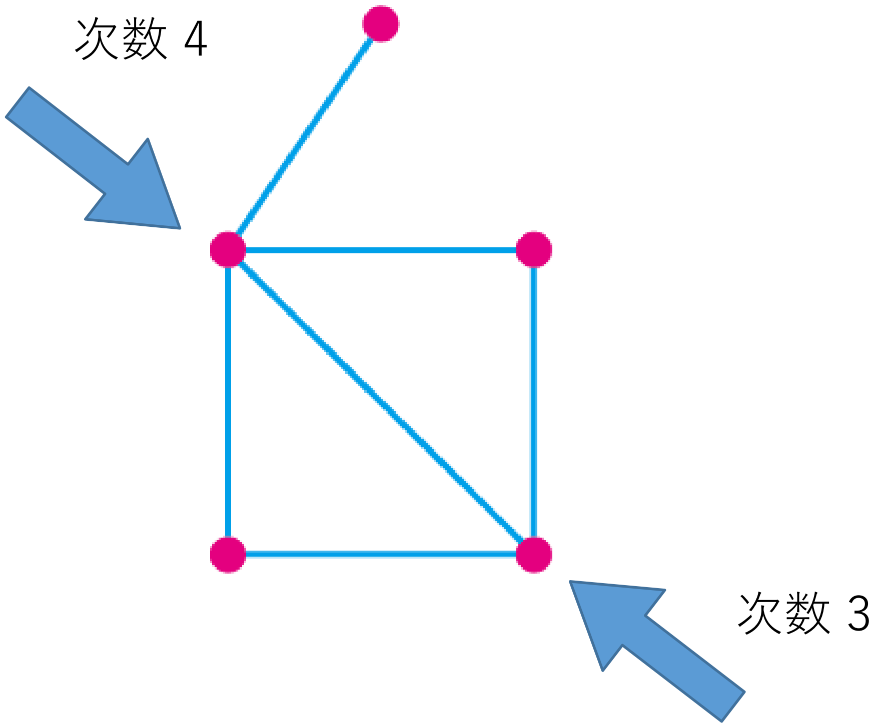
ケーニヒスベルクの橋の問題：
７つの橋を全て渡り、元の場所へ戻る道順を探せ．ただし、同じ橋を２度渡ってはいけない。



一筆書きの問題

オイラーの答え(1735)

一筆書きができるかどうかは、頂点の次数を調べればよい。

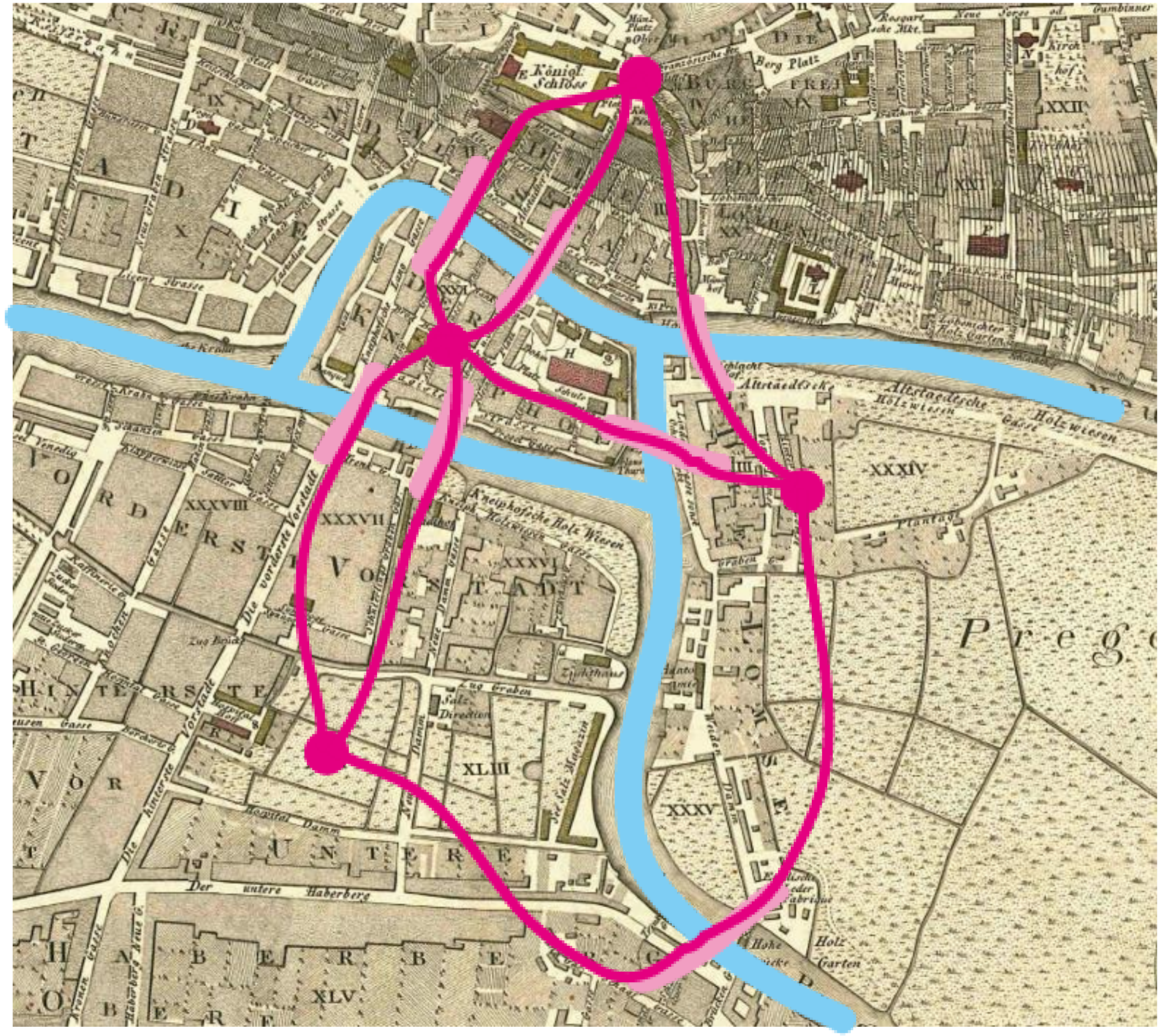


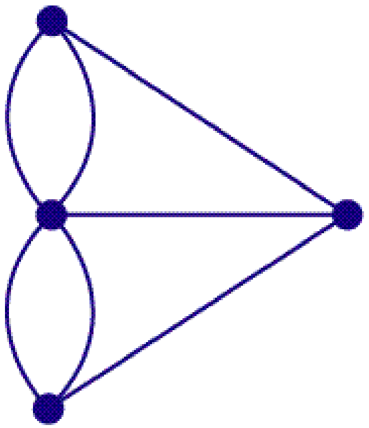
1）全ての頂点の次数が偶数なら、どの頂点から出発しても一筆書きをして元に戻ってこられる。

2）次数が奇数の頂点が2個あり、他の頂点の次数がすべて偶数なら、次数奇数の頂点から出発して、一筆書きをして、もう一つの次数奇数の頂点に至ることができる。

3）それ以外は不可。

グラフ理論の始まり





問題 → 抽象化 → 概念の導入 → 普遍的な成果

数学の力

グラフ理論の広がり

- ある条件を満たす経路の存在・探索
  - オイラー路、ハミルトン路、最短経路、等
- ある条件を満たすグラフの分類
- 彩色問題
  - 地図の四色塗り分け問題もこれ
- グラフ上のダイナミクスやフロー
  - 電気回路、交通流、キャシュフロー、感染症、等
- 複雑ネットワーク
  - たくさんの要素が複雑に絡み合った現象の解明

ローカルなデータ
頂点間の隣接関係

グローバルな性質
グラフ全体に関わる

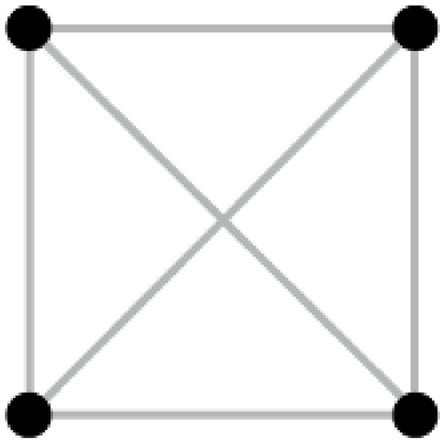
ラムゼー理論

特定の構造や秩序が必ず現れる条件を研究する

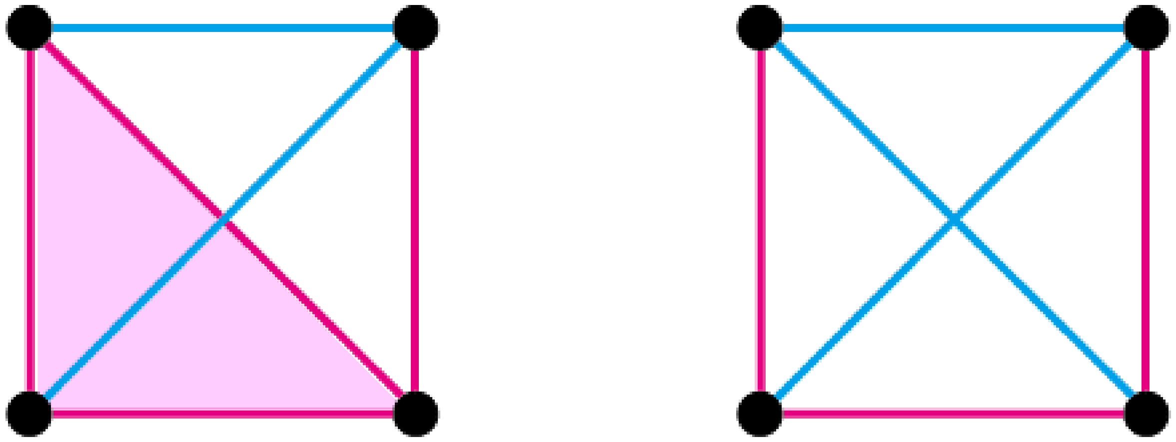
何人か集まったとき、同性の
2人組が必ずできるためには
何人集まらなければないか？

Frank Ramsey (1903-1930)

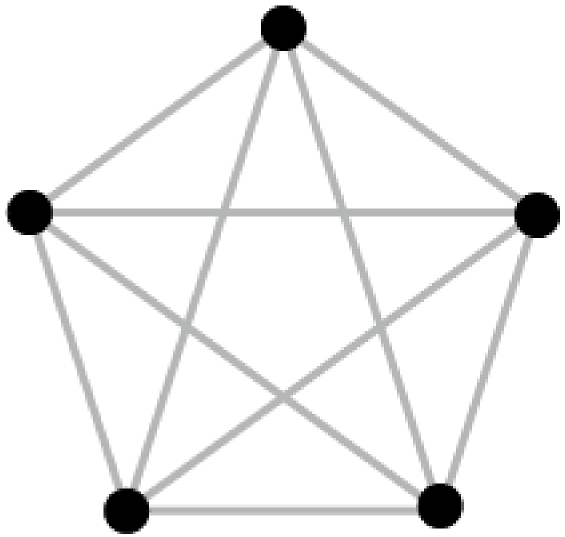
辺を2色で塗り分ける

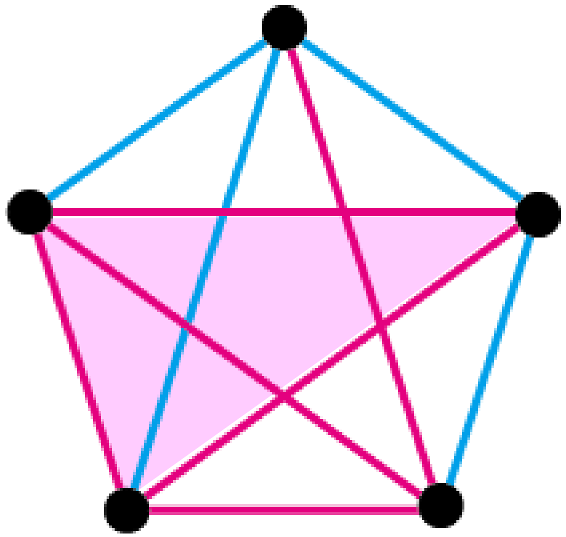


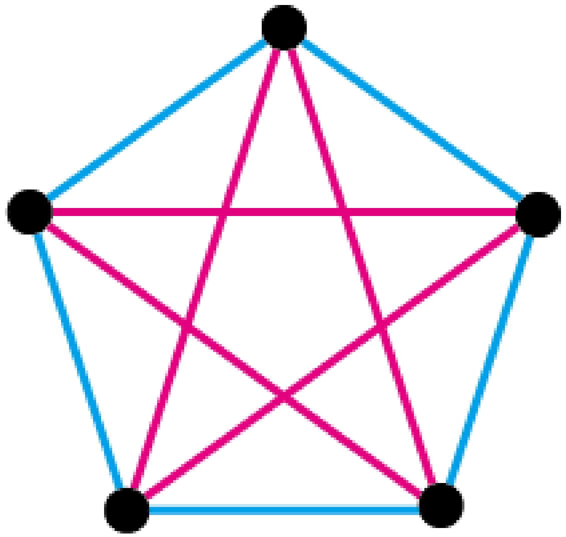
完全グラフ K_4



辺を2色で塗り分ける

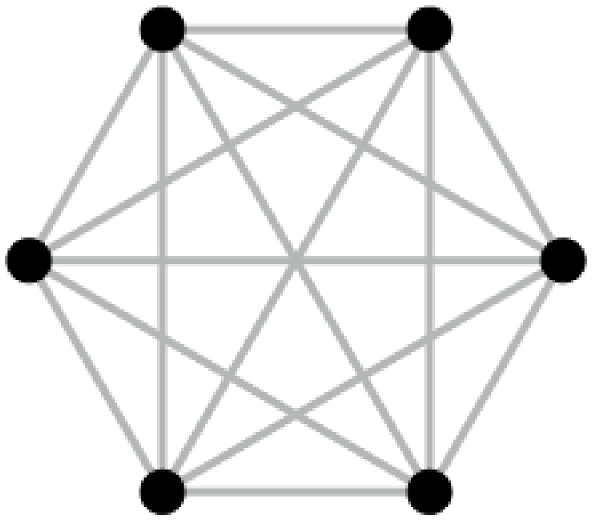




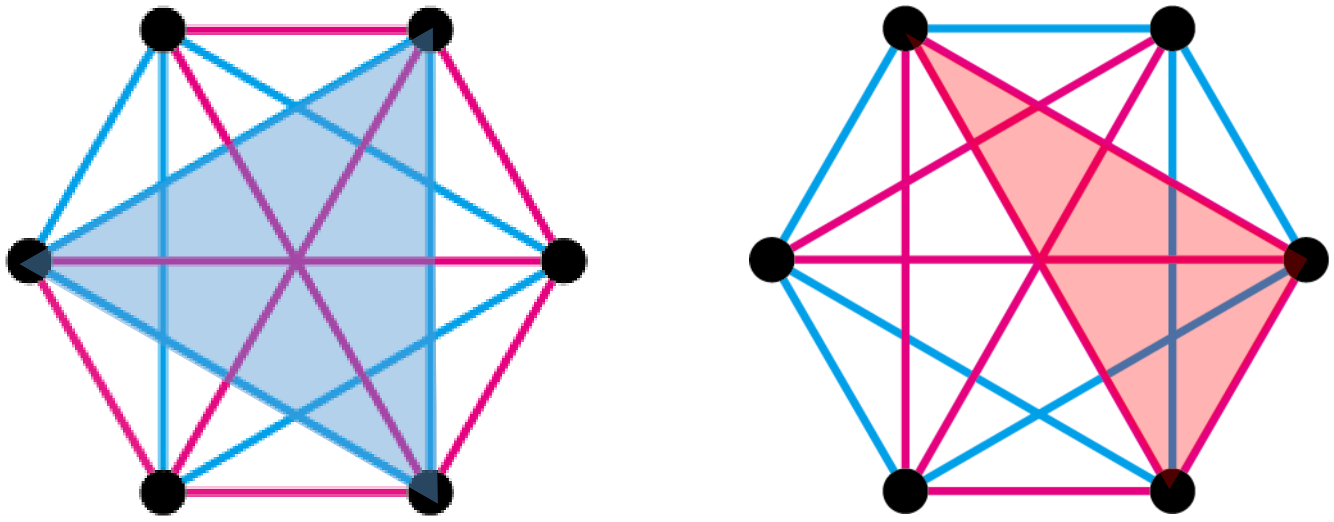


完全グラフ K_5

辺を2色で塗り分ける



完全グラフ K_6

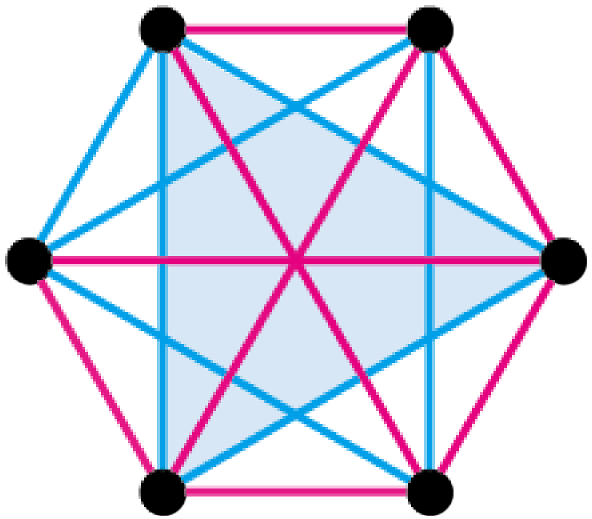


同色の三角形が必ずできてしまう。

ラムゼーの定理：頂点数 n の完全グラフの各辺を青色または赤色で塗り分けるとき、 $n \geq 6$ であれば同色の三角形が必ずできる。

パーティ問題

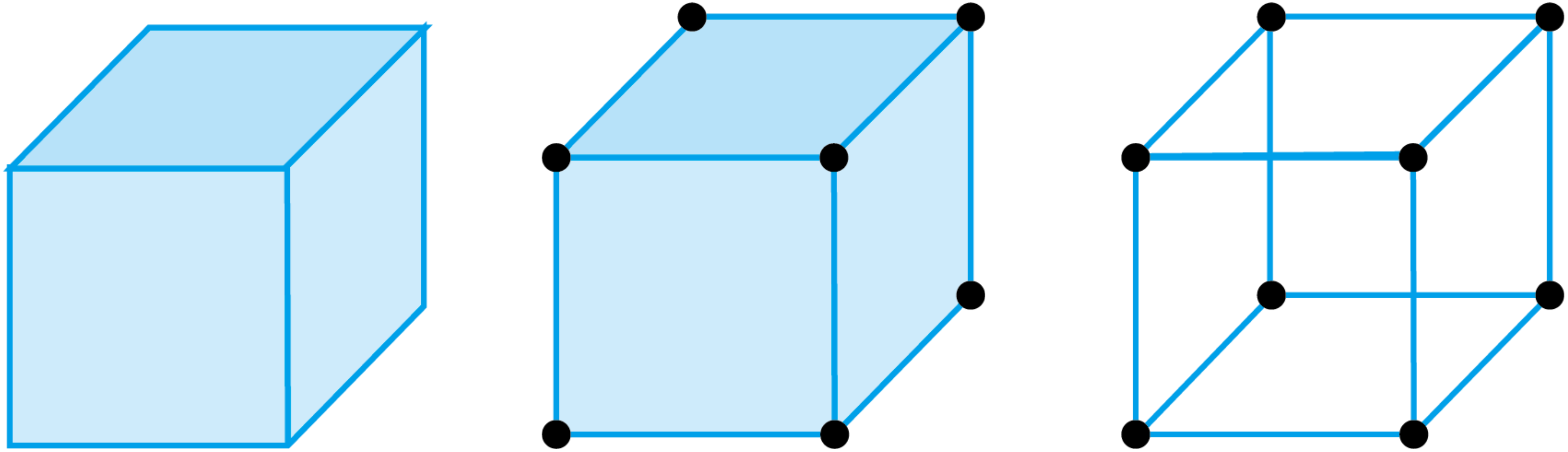
6人以上集まれば、互いに知り合い、
または互いに他人であるような3人組
が必ずできる。



互いに知り合い＝青線
互いに他人＝ 赤線

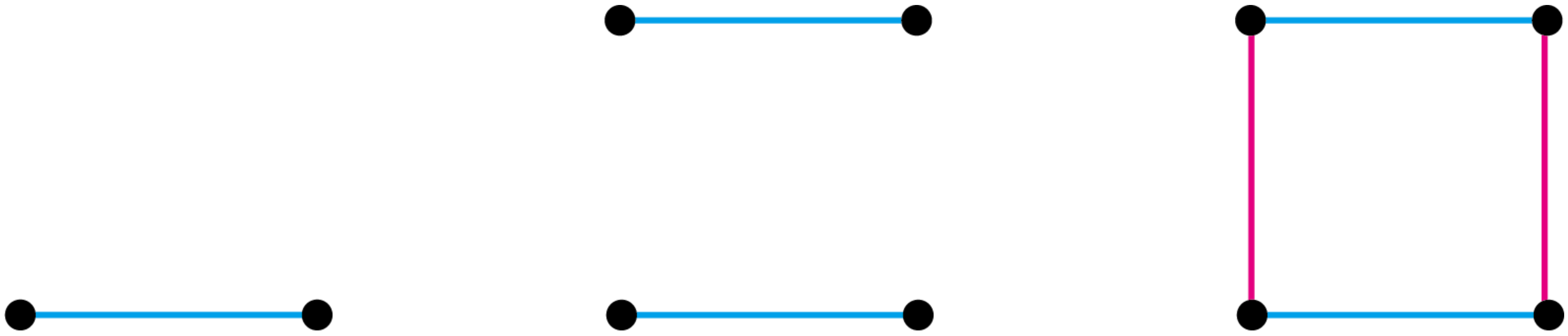
ラムゼーの定理：
同色の三角形が必ずできる。

立方体のグラフ



3次元立方体

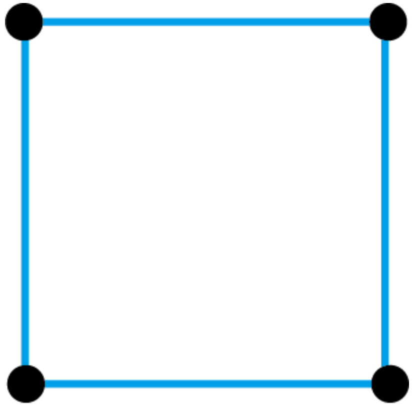
超立方体 - 仕組みを理解して一般化



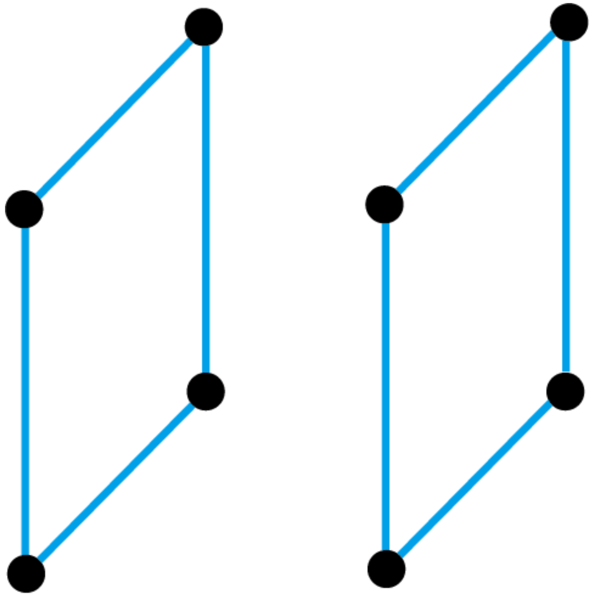
1次元「立方体」

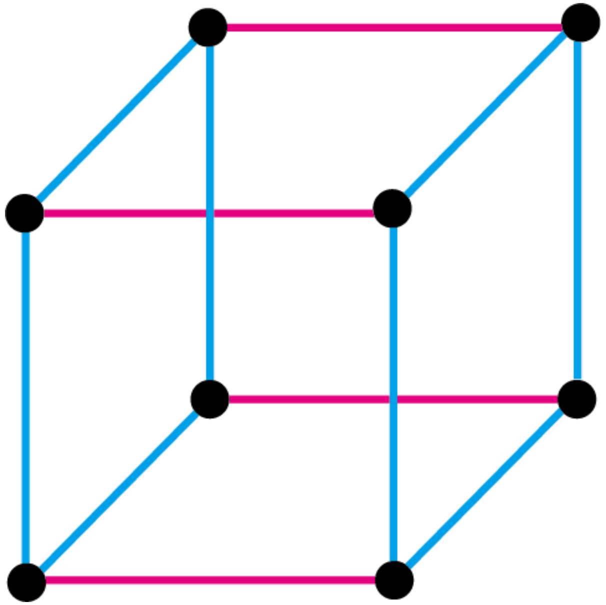
2次元「立方体」

超立方体 - 仕組みを理解して一般化



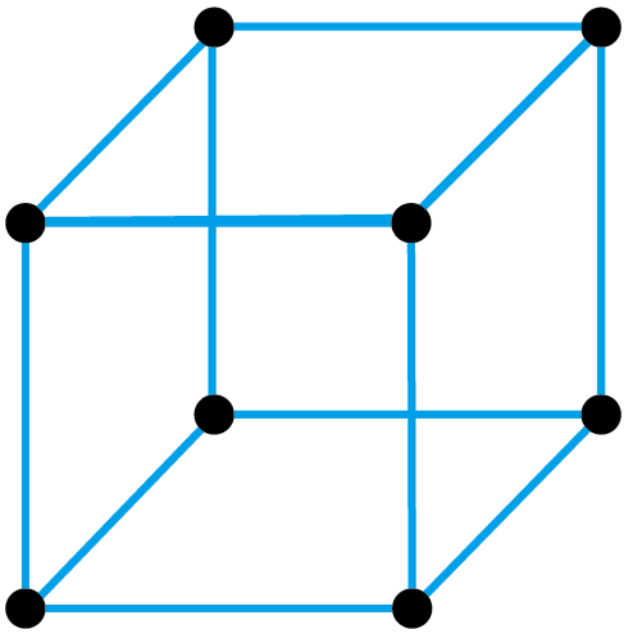
2次元「立方体」

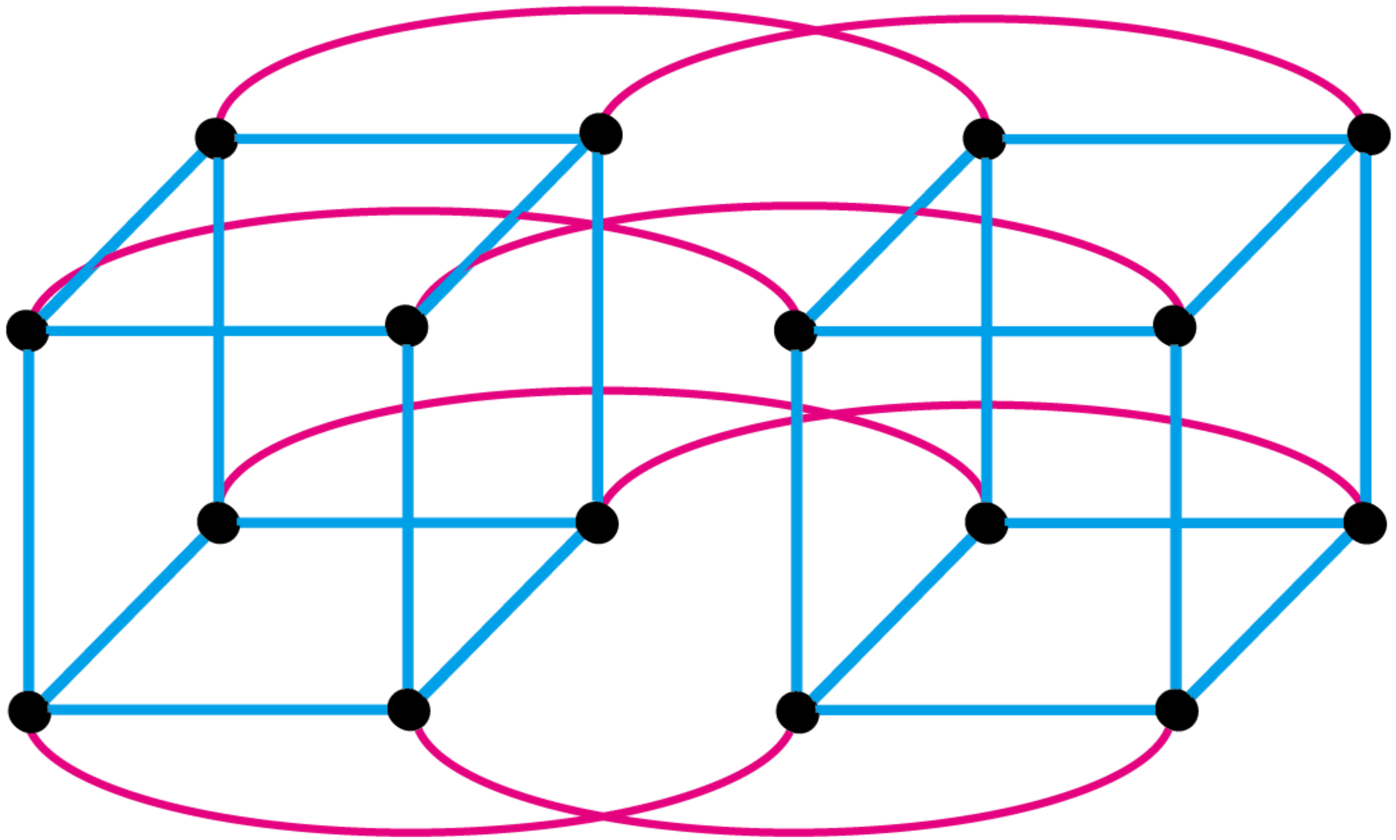




3次元「立方体」

4次元立方体

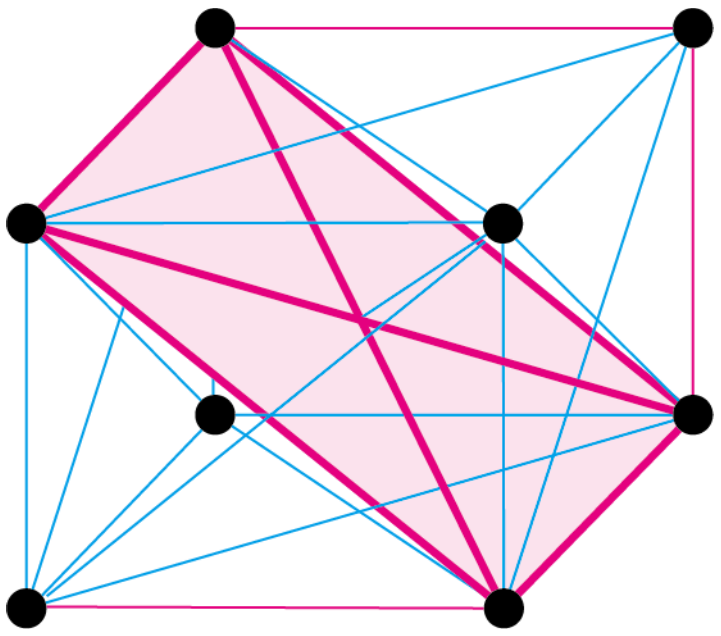

3次元「立方体」


4次元「立方体」

グラハム-ロトシルトの定理（1970）

1）超立方体の頂点をすべて線分で結ぶ。
2）次に、すべての線分を2色で塗り分ける。

このとき、次元ｎが十分大きければ、どんな塗り方をしても、同一平面上にある四角形で、その４頂点を結ぶ線分が全て同色であるものが存在する。



どのくらい大きければよいのか？

グラハム：グラハム数以上のｎについて成り立つ

グラハム数

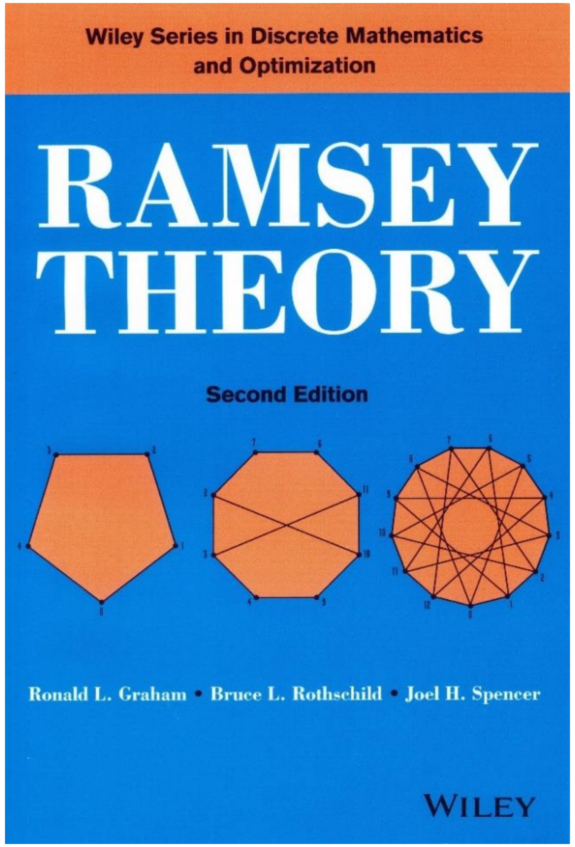
morphism. Then χ' is fliptop so by the lemma above there is a monochromatic line $L \subset C_t^s$. Then $\varphi^{-1}(L) \subset L_1 \times \cdots \times L_s$ is the derived monochromatic line in C_t^n.

2.7 EEEEENORMOUS UPPER BOUNDS

Why is Shelah's proof of the Hales–Jewett theorem considered an improvement of fundamental importance. The answer comes from examining the growth rates of the functions $HJ(r, t)$ given by the proofs of van der Waerden and Shelah. For convenience we shall look particularly at the case $r = 2$. The functions involved grow so rapidly that we must first discuss a special language—called the Ackermann hierarchy—devised by logicians to deal with rapidly growing functions.

The Ackermann hierarchy is a sequence of functions $f_1, f_2, \ldots,$ with domain and range the positive integers. (There are several equivalent formualtions in the literature; we have chosen a formulation hopefully more readily comprehensible to mathematicians.) The first function, f_1, we call DOUBLE and is defined simply by

$$f_1(x) = \mathrm{DOUBLE}(x) = 2x\ .$$



R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer: Ramsey Theory, 1989.

EEEEENORMOUS NUMBER ???

「数字の部屋」

世の中をとりまく８種類の大きなお金についてご紹介しています。

(2017 年 2 月作成)

日本銀行券発行残高 2016 年の大晦日に家庭・企業・金融機関で年越したお札の合計	**約１０２兆円** (102 兆 4, 612 億円)	2016 年 12 月末 (日銀ＨＰ・営業毎旬報告)
日本銀行当座預金決済 金融機関が日本銀行の預金口座で 1 日にやりとりする金額	**約１４６兆円** (146 兆 4, 491 億円)	2016 年 12 月の 1 営業日平均 (日銀ＨＰ・決済動向)
北海道内総生産 北海道内で 1 年間に新しく生産された物やサービスの総額	**約１８兆円** (18 兆 4, 227 億円)	2014 年度名目速報 (北海道庁ＨＰ・道民経済計算)
GDP(国内総生産) 国内で 1 年間に新しく生産された物やサービスの総額　GDP の伸び率が経済成長率に値する	**約５３２兆円** (532 兆 1, 914 億円)	2015 年度名目 (内閣府ＨＰ)
一般会計歳出 国の予算	**約９６兆円** (96 兆 7, 218 億円)	2016 年度予算額 (財務省ＨＰ)
東証１部上場株式時価総額 東京証券取引所に上場されている株式の時価総額	**約５６０兆円** (560 兆 2, 469 億円)	2016 年 12 月末 (日本取引所グループＨＰ)
家計の金融資産 個人の金融資産の合計額	**約１，７５１兆円** (1, 751 兆 7, 776 億円)	2016 年 9 月末速報 (日銀ＨＰ・資金循環統計)
輸　出 日本からの輸出額	**約７０兆円** (70 兆 395 億円)	2016 年中確報 (財務省ＨＰ・貿易統計)

$$1751777600000000$$

$$= 1.7 \times 10^{15}$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$10^b = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{b\text{ 個}} = 100 \cdots 0$$

巨大な数

一	十	百	千	万	億	兆	京	…	無量大数	…	不可説不可説転
10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}		10^{68}		

1	キロ	メガ	ギガ	テラ	ペタ	エクサ	ゼタ	ヨタ	…
10^0	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	

クヌースのタワー表記

$a \uparrow 1 = a^1$

$a \uparrow 2 = a^2$

$a \uparrow 3 = a^3$

$\vdots$

$a \uparrow b = a^b$

$a \uparrow\uparrow 1 = a$

$a \uparrow\uparrow 2 = a \uparrow a \;\; = a^a$

$a \uparrow\uparrow 3 = a \uparrow a \uparrow a \;\; = a^{a^a}$

$\vdots$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b\text{ 個}} = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}_{b\text{ 個}}$$

クヌースのタワー表記

$$a \uparrow\uparrow 1 = a$$

$$a \uparrow\uparrow 2 = a \uparrow a$$

$$a \uparrow\uparrow 3 = a \uparrow a \uparrow a \quad = a^{a^{a}}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b\text{ 個}} \quad = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b\text{ 個}}$$

$$3 \uparrow\uparrow 1 = 3$$

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow 3 = 3^{3} = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^{3}} = 3^{27}$$

$$= 7625597484987$$

$$= 7.6 \times 10^{12}$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^{3^{3}}}$$

$$= 3^{7625597484987}$$

$$= 1.25 \times 10^{3638334640024}$$

クヌースのタワー表記

$$a \uparrow\uparrow 1 = a$$

$$a \uparrow\uparrow 2 = a \uparrow a$$

$$a \uparrow\uparrow 3 = a \uparrow a \uparrow a \quad = a^{a^{a}}$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b\text{ 個}} \quad = \underbrace{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}_{b\text{ 個}}$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 1 = a$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 2 = a \uparrow\uparrow a$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 3 = a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow a$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b\text{ 個}}$$

クヌースのタワー表記

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 1 = a$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 2 = a \uparrow\uparrow a$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow 3 = a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow a$$

$$\vdots$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b\text{ 個}}$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 1 = 3$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 2 = 3 \uparrow\uparrow 3 = 7.6 \times 10^{12}$$

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$$

$$= 3 \uparrow\uparrow 7.6 \times 10^{12}$$

$$= \underbrace{3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}_{7.6\text{ 兆個}}$$

いよいよ....

$$a \uparrow b = a \times a \times \cdots \times a$$

$$a \uparrow\uparrow b = a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a$$

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a$$

$$\overbrace{a \uparrow \cdots \uparrow}^{n\text{個}} b = a \uparrow^n b$$

$$= \underbrace{a \uparrow^{n-1} a \uparrow^{n-1} \cdots \uparrow^{n-1} a}_{b\text{個}}$$

$$\boxed{G(n) = 3 \uparrow^n 3}$$

$$G(1) = 3 \uparrow 3 = 27$$

$$G(2) = 3 \uparrow\uparrow 3 = 7.6 \times 10^{12}$$

$$G(3) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$$

$$= 3 \uparrow\uparrow G(2)$$

$= 3$を7.6×10^{12}回累乗する

$$G(4) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$$

$$= 3 \uparrow\uparrow\uparrow G(3)$$

$= 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow 3$　　$G(3)$ 回繰り返す

ついに、グラハム数

$G(n) = 3 \uparrow^n 3$

$G(1) = 3 \uparrow 3 = 27$

$G(2) = 3 \uparrow\uparrow 3 = 7.6 \times 10^{12}$

$G(3) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3$

$= 3 \uparrow\uparrow G(2)$

$= 3$を7.6×10^{12}回累乗する

$G(4) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow G(3)$

$G^2(4) = G(G(4)) = 3 \uparrow^{G(4)} 3 = 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{\uparrow\text{が } G(4) \text{ 個}} 3$

$G^3(4) = G(G^2(4)) = 3 \uparrow^{G^2(4)} 3 = 3 \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{\uparrow\text{が } G^2(4)\text{個}} 3$

⋮

$G^{64}(4)$　グラハム数

ギネスブック(1980)
数学の証明で使われた最大の数

グラハム数は実在しているのか？

全宇宙の素粒子の数　10^{80}

1グーゴル(googol)　10^{100}

最大のメルセンヌ素数(2018年1月)　$2^{77232917}-1=4.6\times10^{23249424}$

1不可説不可説転＝$10^{37218383881977644441306597687849648129 5}$ $=10^{3.7\times10^{37}}$

1 グーゴルプレックス $10^{googol}=10^{10^{100}}$

$G(3)=\underbrace{3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3^3}}}}}}}_{7.6\text{ 兆個}}$

$G(4)=\underbrace{3\uparrow\uparrow3\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow3}_{G(3)\text{ 個}}$

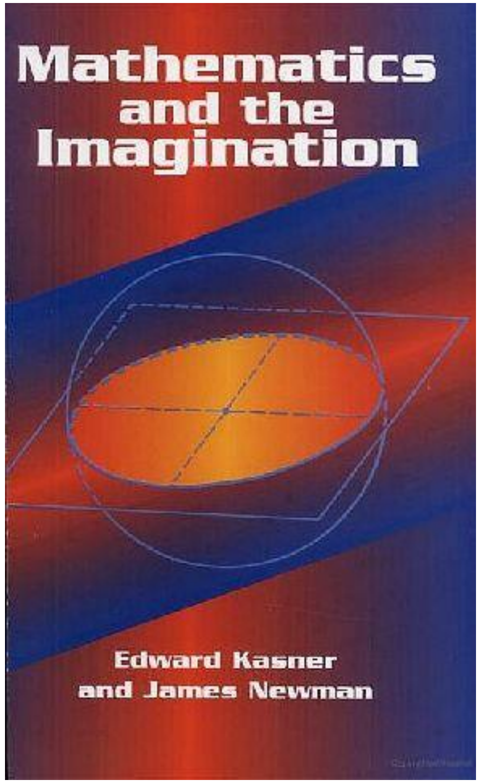
グラハム数

$G^{64}(4)$

数学は想像と創造である

- 数学≠数の学問
- mathema（古代ギリシャ起源）＝知識・学問
- 一見、単純なものの中に深淵なるものを見出す。
  しばしば、人間精神の限界にも迫る。

身の回りの事象がヒント → 抽象化 概念化 → 普遍的な知



googol は9歳の
子供の創案