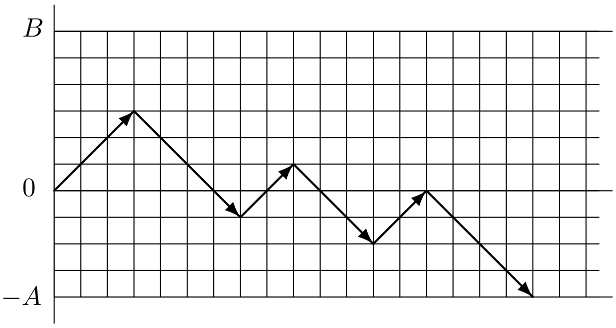
5.7　ギャンブラーの破産問題

時刻 $n=0$ で原点 0 から出発する $\mathbf{Z}$ 上のランダム・ウォーカーを考えよう．ただし, $-A$ と B ($A\ge 1$, $B\ge 1$) に壁があり, いずれかの壁に触れたらそれ以降, その位置にとどまり続ける (あるいは, その動きを停止する) という条件をつける．このような壁を**吸収壁**という．

成功確率 $0<p<1$ のベルヌイ試行列を $Z_1, Z_2, \dots$ とし, 確率変数列 $X_0, X_1, X_2, \dots$ を次のように定義する．

$$X_0=0, \qquad X_n=\begin{cases} X_{n-1}+Z_n\,, & -A<X_{n-1}<B, \\ -A, & X_{n-1}=-A, \\ B, & X_{n-1}=B. \end{cases} \tag{5.6}$$

このような確率変数列 $\{X_n\}$ を**吸収壁をもつランダム・ウォーク**という．



壁に吸収される確率

$$R=P(\text{ある時刻 } n \text{ で } X_n=-A)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=-A\}\right),$$
$$S=P(\text{ある時刻 } n \text{ で } X_n=B)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=B\}\right)$$

なお, 右辺の和事象は互いに排反になっていない．

漸化式による巧妙な方法で R, S を求めてみよう．今考えているランダム・ウォークの初期条件は $X_0=0$ である．この初期条件を一般化して, $-A\le k\le B$ を満たす整数 k に対して, 初期条件を $X_0=k$ で置き換えた吸収壁をもつランダム・ウォークを $X_n^{(k)}$ で表そう．従来のものは $X_n=X_n^{(0)}$ ということになる．ランダム・ウォーク $X_n^{(k)}$ が壁 $-A$, B に吸収される確率をそれぞれ R_k, S_k とおく．$R=R_0$, $S=S_0$ となる．

補 題 5.7.1 $\{R_k\,;\,, -A\le k\le B\}$ は次の漸化式と境界条件をみたす．

$$R_k=pR_{k+1}+qR_{k-1}\,, \qquad R_{-A}=1, \qquad R_B=0. \tag{5.7}$$

同様に, $\{S_k\,;\,, -A\le k\le B\}$ は次の漸化式と境界条件をみたす．

$$S_k=pS_{k+1}+qS_{k-1}\,, \qquad S_{-A}=0, \qquad S_B=1. \tag{5.8}$$

定 理 5.7.2 $A \geq 1$, $B \geq 1$ を整数とする．$\{X_n\}$ を $-A$ と B に吸収壁をもつランダム・ウォークで (5.5.6) で定義されるものとする．このランダム・ウォークが壁に吸収される確率は,

$$P(\text{ある時刻 } n \text{ で } X_n = -A) = \begin{cases} \dfrac{(q/p)^A - (q/p)^{A+B}}{1-(q/p)^{A+B}}, & p \neq q, \\ \dfrac{B}{A+B}, & p = q = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$P(\text{ある時刻 } n \text{ で } X_n = B) = \begin{cases} \dfrac{1-(q/p)^A}{1-(q/p)^{A+B}}, & p \neq q, \\ \dfrac{A}{A+B}, & p = q = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

で与えられる．特に, このランダム・ウォークは確率 1 で壁に吸収される．

吸収壁をもつランダム・ウォークは, **ギャンブラーの破産問題** (the gambler's ruin problem) に明快な視点と解法をもたらした．A,B の 2 人が公正なコインによる賭けをする．それぞれの持ち点を A, B として, コイン投げの勝負によって 1 点ずつやり取りするものとする．つまり, コイン投げに勝てば相手から 1 点を受け取り, 負ければ相手に 1 点を譲り渡す．このゲームは, 一方の持ち点が 0 になった段階で終了し, 勝者は $A+B$ 点を獲得するものとする．A,B がそれぞれ勝利する確率に関心がある．n 回目のゲームが終了した時点での A の持ち点を $A+X_n$ として, 得点の収支を X_n とおくと, $\{X_n\}$ は吸収壁をもつランダム・ウォークである．定理 5.7.2 によって, A,B それぞれが勝つ確率 $P(A), P(B)$ は,

$$P(A) = \frac{A}{A+B}, \qquad P(B) = \frac{B}{A+B} \tag{5.9}$$

となり, ゲーム開始時の持ち点に比例することがわかる．たとえば, $A=1$, $B=100$ なら $P(A)=1/101$, $P(B)=100/101$ となり, A に勝ち目はないだろう．

公正なコインによる賭けでは, 定理 5.5.1 によって原点再帰性が保障されている．どんなに負けが込んでも賭けを継続しさえすれば, 将来必ず収支が 0 に戻ってくるのである．しかしながら, 現実には, 資金力という壁が存在する．(5.5.9) はその壁の効果を教えている．資金が少ないギャンブラーは膨大な資金力を有する胴元には勝てないということである．

ゲームが終了するまでに要するコイン投げの平均回数

定 理 5.7.3 $\{X_n\}$ を定理 5.7.2 と同じ吸収壁をもつランダム・ウォークとする．このランダム・ウォークが壁に吸収されるまでに要する時間の平均値は次のようになる．

$$\begin{cases} \dfrac{A}{q-p} - \dfrac{A+B}{q-p}\,\dfrac{1-(q/p)^A}{1-(q/p)^{A+B}}, & p \neq q, \\ AB, & p = q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

レポート問題 13 $p = q = 1/2$ の場合について, 定理 5.7.3 を証明せよ．