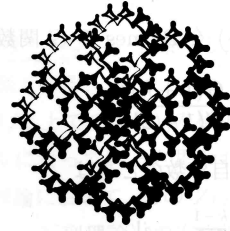


成長するネットワークとランダム行列

量子確率論の視点



尾畑 伸明

1. ランダム行列のスペクトル

一般に、 n 次の実対称行列 $A = (A_{ij})$ の固有値を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ とするとき、

$$\mu_A(dx) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta(x - \lambda_i) dx$$

で定義される $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上の確率分布を A の固有値分布と言う。固有値分布は、

$$\frac{1}{n} \text{Tr}(A^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_A(dx), \quad m = 1, 2, \dots$$

によって特徴付けられる。

ウイグナー^{20~22)}は、ランダム対称行列の次数無限大における漸近的固有値分布を調べ、いわゆるウイグナーの半円則 $w(dx)$ を導出した。ウイグナーの半円則は、モーメント列

$$M_{2m-1}(w) = 0,$$

$$M_{2m}(w) = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

によって特徴付けられる。集合 $\{1, 2, \dots, 2m\}$ の非交差分割の全体を $\mathcal{P}_{\text{NCP}}(2m)$ とおくと、 $|\mathcal{P}_{\text{NCP}}(2m)| = M_{2m}(w)$ が成り立つ。これをカタラン数と言う。

成分が確率変数になっている n 次実対称行列 $A = (A_{ij})$ で次の条件を満たすものを考えよう。

- (i) $A_{ii} = 0$ かつ $A_{ij} = A_{ji}$.
- (ii) 確率変数の族 $\{A_{ij}; 1 \leq i < j \leq n\}$ は独

立で同分布に従う。

- (iii) その分布はすべての次数のモーメントをもち、標準化されている (すなわち、 $\mathbf{E}(A_{ij}) = 0$, $\mathbf{E}(A_{ij}^2) = 1$).

このとき、 μ_A はランダム測度になる。その平均測度 $\mu_n = \mathbf{E}(\mu_A)$ が、行列の次数 n が大きいときにどのように振る舞うかに興味がある。

定理 (ウイグナー) $m = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{m/2}} M_m(\mu_n) = M_m(w)$$

が成り立つ。

確率分布 μ_n の平均は 0、分散は $n - 1$ であることに注意すれば、上の定理は、正規化された μ_n がウイグナーの半円則に収束することを意味する。なお、条件 (i)–(iii) を弱めたときの結果や確率測度の収束について様々な結果が得られている^{3, 11)}。また、ウイグナーの半円則は多くのランダム行列に共通して現れるが、その普遍性はヴォイクレスクの創始した自由確率論の枠組みで明らかになる^{10, 11, 19)}。自由確率論をさらに一般化した量子確率論は、大きなグラフやランダム・グラフのスペクトルの漸近挙動を調べるのに有効である。本稿では、そのさわりの部分を紹介したい¹³⁾。

2. 量子確率論

複素数体 \mathbb{C} 上の代数 \mathcal{A} に対合と呼ばれる演算

$a \mapsto a^*$ を与えたものを $*$ -代数と言う。ここでは、乗法の単位元 $1_{\mathcal{A}}$ の存在を仮定する。例えば、 n 次複素行列の全体 $M(n, \mathbb{C})$ は共役転置行列によって $*$ -代数になる。 $*$ -代数 \mathcal{A} 上で定義された \mathbb{C} -値関数は、次の 3 つの性質を満たすとき、 \mathcal{A} 上の状態と呼ばれる。

- (S1) φ は線形関数。
- (S2) すべての $a \in \mathcal{A}$ に対して $\varphi(a^*a) \geq 0$ 。
- (S3) $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ 。

$*$ -代数 \mathcal{A} とその上で定義された状態 φ を組にした (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間と言う。この概念は非常に広いものであって、 $*$ -代数に位相的な性質 (\mathbb{C}^* 代数等) を仮定しない。いわゆる (コルモゴロフ流) 確率論における確率空間は、確率変数のなす $*$ -代数と平均値で定義される状態を組にして代数的確率空間に移行する。このとき、 \mathcal{A} は可換な $*$ -代数になる。量子確率論では \mathcal{A} が非可換な場合にむしろ興味がある。

代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) において、 $a \in \mathcal{A}$ を確率変数、 $a = a^*$ であるようなものを実確率変数と称する。実確率変数 a に対して、

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots$$

を満たす $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上の確率分布 μ が存在する。これを a の φ における分布と言う。分布の存在はハンケル行列式とハンブルガーの定理からわかる。一意性は難しい問題 (モーメント問題) であるが、例えば、コンパクト台をもつ μ に対しては一意性が成り立つ¹⁸⁾。

代数的確率空間を基礎とする “確率論” を量子確率論と称する。その手法は様々な形でスペクトル解析に応用されるが、特に、

- (a) 多様な独立性と付随する中心極限定理。
- (b) 量子分解と相互作用フォック空間。
- (c) 分割の統計。

のあたりを垣間見てゆこう。

3. グラフのスペクトル

頂点集合 V と頂点間の隣接関係から決まる図形をグラフと言う。2 つの頂点 $x, y \in V$ が隣接している (辺で結ばれている) とき $x \sim y$ と記す。有限グラフ ($|V| < \infty$)、無限グラフ ($|V| = \infty$) の両方を扱うが、無限グラフのときは、各頂点 $x \in V$ の次数 $\kappa(x) = |\{y \in V; y \sim x\}|$ が有限であること (局所有限性) を仮定する。

グラフ $\mathcal{G} = (V, E)$ の隣接行列 $A = (A_{xy})$ を

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & x \sim y, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。隣接行列はグラフの代数的表現として基本的である⁵⁾。有限グラフの場合は、隣接行列 A の固有値分布が定まるが、これを有限グラフのスペクトル分布と言う⁸⁾。無限グラフに対しては、 A が無限行列になるので単純に固有値分布を考えるわけにはいかない。有限グラフ、無限グラフの両方に通用する概念を導入しよう。

局所有限性から、隣接行列 A のべき乗が定義され、したがって A の複素係数多項式の全体 $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ は通常の行列演算で可換な $*$ -代数となる。これをグラフ \mathcal{G} の隣接代数と言う。隣接代数に状態を考え合わせることで、隣接行列 A を確率変数として取り扱うことができる。 A の状態 φ における分布をグラフの φ におけるスペクトル分布と言う。状態として基本的なものは次の 2 つである。

- (a) トレース (有限グラフのとき)。

$$\varphi_{\text{tr}}(a) = \frac{1}{|V|} \text{Tr}(a), \quad a \in \mathcal{A}(\mathcal{G}).$$

隣接行列 A の φ_{tr} における分布は、グラフのスペクトル分布に一致する。

- (b) 真空状態。ヒルベルト空間 $l^2(V)$ の標準的な基底を $\{\delta_x; x \in V\}$ とする。頂点 $o \in V$ に付随するベクトル状態が

$$\varphi_o(a) = \langle \delta_o, a \delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$$

で定義される。これを頂点 $o \in V$ に付随する真空状態と言う。 $\varphi_o(A^m)$ は、 o を出発して

m ステップで o に戻る歩道の個数に一致する。したがって、 A の φ_o における分布 μ は、そのような組合せの数を μ のモーメントで表示することになる。

他に、真空状態の 1 径数変形が興味深い。グラフ距離を $\partial(x, y)$ として、グラフの Q -行列が $Q_q = (q^{\partial(x, y)})$ で定義される。これを用いて定義される $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ 上の線形関数

$$\varphi_q(a) = \langle Q_q \delta_o, a \delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$$

は、フォック空間でいうコヒーレント状態に近い性質をもつ。ただし、 φ_q がどのような $q \in [-1, 1]$ で正值性を満たすかは、特別な場合を除いてあまり知られていない^{7, 17)}。

4. 成長するグラフのスペクトル解析

整数格子 \mathbb{Z}^N で説明しよう。隣接行列を A_N とする。原点を $o = (0, \dots, 0)$ として、 δ_o における A_N のスペクトル分布の高次元極限 $N \rightarrow \infty$ に興味がある。部分集合 $V_n = \{x \in \mathbb{Z}^N; \partial(x, o) = n\}$ を導入すると、 \mathbb{Z}^N は、

$$\mathbb{Z}^N = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

のように分割 (階層化) される。各階層に対応する単位ベクトル $\Phi_n \in l^2(\mathbb{Z}^N)$ を

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

で定義する。任意の頂点 $x \in V$ に隣接する点は、すぐ上または下の階層にだけ存在することから、隣接行列 A_N は自然に 2 つの成分の和になる：

$$A_N = A_N^+ + A_N^-.$$

これを量子分解と言う。簡単な考察によって、

$$\frac{A_N^+}{\sqrt{2N}} \Phi_n = \sqrt{n+1} \Phi_{n+1} + O(N^{-1/2}),$$

$$\frac{A_N^-}{\sqrt{2N}} \Phi_n = \sqrt{n} \Phi_{n-1} + O(N^{-1})$$

が得られる。したがって、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N^\pm}{\sqrt{2N}} = B^\pm$$

は (1 モード) ボゾン・フォック空間の生成・消滅作用素の作用に一致することがわかる。さらに、ボゾン・フォック空間の場の作用素 $B^+ + B^-$ の真空状態における分布はガウス分布であることが知られているので、 $m = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \delta_o, \left(\frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \delta_o \right\rangle \\ &= \langle \Omega, (B^+ + B^-)^m \Omega \rangle_{\text{Boson}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 Ω はボゾン・フォック空間の真空ベクトルである。つまり、整数格子 \mathbb{Z}^N の隣接行列 A_N の真空状態におけるスペクトル分布はガウス分布に漸近する。

より一般の成長するグラフ \mathcal{G}_ν に対して上の方法を適用することができる^{12, 13)}。 \mathcal{G}_ν の隣接行列 A_ν の量子分解は、

$$A_\nu = A_\nu^+ + A_\nu^- + A_\nu^0$$

のように一般には 3 成分からなる (図 1)。このとき、適当な正規化定数 Z_ν を用いて、

$$B^\epsilon = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{A_\nu^\epsilon}{Z_\nu}, \quad \epsilon \in \{+, -, 0\}$$

が (1 モード) 相互作用フォック空間¹⁾の生成、消滅、および対角作用素として定めれば、

$$B^+ \Psi_n = \sqrt{\omega_{n+1}} \Psi_{n+1},$$

$$B^- \Psi_n = \sqrt{\omega_n} \Psi_{n-1}, \quad B^- \Psi_0 = 0,$$

$$B^0 \Psi_n = \alpha_{n+1} \Psi_n$$

を満たす数列の組 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ が求まる。成長

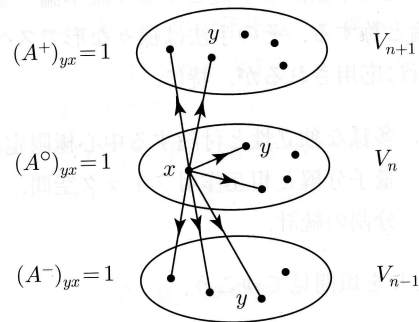


図 1 隣接行列の量子分解。

する正則グラフの場合は、グラフの階層構造に関わる統計量から求めることができる¹²⁾。この数列の組（ヤコビ係数と呼ぶ）からスペクトル分布 μ を求めるのは古典解析に属する問題となる。実際、

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x - \alpha_1, \\ xP_n(x) &= P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x) \end{aligned}$$

で定義される多項式列の直交化測度が求めるべきスペクトル分布となる。隣接行列 A_ν を量子分解して、可換代数 $\mathcal{A}(G)$ を非可換拡張することで、 A_ν の極限挙動が明らかになってくる点が面白い。

整数格子に対極的な例として等質樹木がある。次数 N の等質樹木 \mathbb{T}_N の隣接行列 A_N の真空状態におけるスペクトル分布は、 $N \rightarrow \infty$ においてウィグナーの半円則に漸近する（量子分解法のよい練習問題である）。さらに、有限の N で A_N の真空状態におけるスペクトル分布（ケステン分布¹⁴⁾ と言う）を具体的に求めることも容易である²⁾。

上のウィグナーの半円則は別の観点からも導出される。等質樹木 \mathbb{T}_{2N} は N 個の生成元をもつ自由群 \mathbb{F}_N のケーリー・グラフである。群構造は便利である。 $(U, l^2(\mathbb{F}_N))$ を \mathbb{F}_N の正則表現とする。 \mathbb{F}_N の生成元を g_1, \dots, g_N とすれば、 \mathbb{T}_{2N} の隣接行列 A_N は $l^2(\mathbb{F}_N)$ 上の作用素として、

$$\frac{A_N}{\sqrt{2N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N X_k, \quad X_k = \frac{U(g_k) + U(g_k)^*}{\sqrt{2}}$$

と表される。 X_k は標準化されているが、さらに、 $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ は状態 δ_e において自由独立と呼ばれる関係を満たす。したがって、自由中心極限定理によって極限は自由フォック空間で記述され、極限分布がウィグナーの半円則になる^{2, 10, 11, 19)}。

今の議論を整数格子 \mathbb{Z}^N に適用すると、加法群 \mathbb{Z}^N の可換性を反映して、 $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ は状態 δ_0 において可換独立となる。可換中心極限定理を適用すると、極限がボゾン・フォック空間で記述され、極限分布としてガウス分布が導かれる。なお、フーリエ変換を用いて、普通の中心極限定理に帰着することもできる。

ある種のグラフ構造に量子確率論の独立性の概念を関連付けるのは興味深いテーマである。楕円グラフには単調独立性、星型グラフにはブール独立性が対応し、極限分布として逆正弦則やベルヌイ分布が導かれる^{2, 16)}。さらに、量子分解と組み合わせることで、多くの具体例が計算される^{2, 12, 13)}。成長する（複雑）ネットワークのスペクトル解析に向けた更なる発展を期待したい。

5. ランダム・グラフの希薄極限

一般に、何らかのランダムなメカニズムによって生成されるグラフをランダム・グラフと総称する⁶⁾。ここでは、最も単純なランダム・グラフを取り上げる。 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ を頂点集合とするグラフの全体を Ω とし、 $0 < p < 1$ を定数とする。 Ω 上の確率 P を

$$P(\{G\}) = p^{e(G)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(G)}, \quad G \in \Omega$$

によって定義する。ここで、 $e(G)$ がグラフ G の辺の個数である。確率空間 $\mathcal{G}_{n,p} = (\Omega, P)$ が考察すべきランダム・グラフである。これは、 V の異なる2点 $\{x, y\}$ に辺を引くかどうかを成功確率 p のコイン投げで定めたものと言える。

ランダムグラフ $\mathcal{G}_{n,p}$ は

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad np \rightarrow \kappa \text{ (定数)} \quad (1)$$

の希薄極限で樹木のように振る舞うと見なされる¹⁵⁾。このことをスペクトルの観点から調べてみよう。

各 $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ に隣接行列 $A = (A_{xy})$ を対応させる。 A は次の性質を満たすランダム行列になる。

- (i) $A_{xx} = 0$ かつ $A_{xy} = A_{yx}$.
- (ii) 確率変数の族 $\{A_{xy}; 1 \leq x < y \leq n\}$ は独立で同分布に従う。
- (iii) その分布は成功確率 p のベルヌイ分布、すなわち、 $P(A_{xy} = 1) = p, P(A_{xy} = 0) = 1-p$.

A の固有値分布、すなわち $G \in \mathcal{G}_{n,p}$ のスペクトル分布 μ_G はランダム測度になる。その平均測度 $\mu_{n,p} = \mathbf{E}(\mu_G)$ をランダムグラフ $\mathcal{G}_{n,p}$ の平均ス

ベクトル分布と言う． $\mu_{n,p}$ の希薄極限 (1) に興味がある．

ランダムグラフ $\mathcal{G}_{n,p}$ ではどの頂点も同等であるから， $\mathbf{E}\langle\delta_o, A^m\delta_o\rangle$ は頂点 $o \in V$ の選び方によらない．したがって， $\mu_{n,p}$ の m 次モーメントは

$$M_m(\mu_{n,p}) = \mathbf{E}\langle\delta_o, A^m\delta_o\rangle \quad (2)$$

で与えられる． $\mu_{n,p}$ の平均値 $M_1(\mu_{n,p}) = 0$ は明らかである．

以下， $m \geq 2$ とする．(2) の右辺を A^m の成分を用いて展開する． V に属する頂点の列で $[z]: o \neq z_1 \neq \dots \neq z_{m-1} \neq o$ なるものの全体を $\mathcal{S}_m(V, o)$ とする． $A_{zz} = 0$ に注意すれば，

$$M_m(\mu_{n,p}) = \sum_{[z] \in \mathcal{S}_m(V, o)} \mathbf{E}(A_{oz_{m-1}} \cdots A_{z_1 o})$$

が得られる．各 $[z] \in \mathcal{S}_m(V, o)$ に対して，連結グラフ $H[z]$ を対応させる．つまり， $H[z]$ の頂点は， $[z]$ に現れる頂点と o を合わせたものとし，辺は $\{o, z_1\}, \dots, \{z_{m-1}, o\}$ とする．この $H[z]$ を $[z]$ の下部グラフと呼ぼう．そうすれば，

$$M_m(\mu_{n,p}) = \sum_{[z] \in \mathcal{S}_m(V, o)} p^{e(H[z])} \quad (3)$$

がわかる．実際， $A[z] = A_{oz_{m-1}} \cdots A_{z_2 z_1} A_{z_1 o}$ を考えると，この中には同一の A_{ij} が複数回現れているかもしれないが， A_{ij} の値は 0 または 1 なので，何乗しても値は変わらない．したがって， $A[z]$ は異なる A_{ij} の積になり，それらは独立である． $\mathbf{E}(A_{ij}) = p$ に注意すれば，(3) が導かれる．

次に，集合 $\mathcal{S}_m(V, o)$ を

$$\mathcal{S}_m(V, o) = \mathcal{S}_m^{(I)}(V, o) \cup \mathcal{S}_m^{(II)}(V, o)$$

のように 2 つに分割する． $\mathcal{S}_m^{(I)}(V, o)$ は $[z] \in \mathcal{S}_m(V, o)$ のうち，下部グラフ $H[z]$ がサイクルを含むようなものの全体であり， $\mathcal{S}_m^{(II)}(V, o)$ は $H[z]$ がサイクルを含まない，つまり， $H[z]$ が樹木になるようなものの全体である．これに応じて，(3) の右辺を 2 つに分ける：

$$M_m(\mu_{n,p}) = (I) + (II), \quad (4)$$

$$(I) = \sum_{[z] \in \mathcal{S}_m^{(I)}(V, o)} p^{e(H[z])},$$

$$(II) = \sum_{[z] \in \mathcal{S}_m^{(II)}(V, o)} p^{e(H[z])}.$$

まず，(I) であるが，一般に，サイクルを含む連結グラフ H に対して $e(H) \geq v(H)$ が成り立つので，和を $H[z]$ の頂点数で分けて，

$$(I) \leq \sum_{s=2}^m \sum_{\substack{[z] \in \mathcal{S}_m^{(I)}(V, o) \\ v(H[z])=s}} p^s$$

を得る．右辺に簡単な組合せの評価を施せば，

$$\begin{aligned} (I) &\leq \sum_{s=2}^m \binom{n-1}{s-1} s^{m-1} p^s \\ &\leq p \sum_{s=2}^m (np)^{s-1} s^{m-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

一方，(II) であるが，樹木上で奇数ステップで元の点に戻ることは不可能であるから， m が奇数なら $(II) = 0$ ．以上から，

$$\lim_{(1)} M_{2m+1}(\mu_{n,p}) = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{(1)} M_{2m}(\mu_{n,p}) = \lim_{(1)} \sum_{[z] \in \mathcal{S}_{2m}^{(II)}(V, o)} p^{e(H[z])} \quad (6)$$

が得られた．

(6) をもう少し計算しよう．各 $[z] \in \mathcal{S}_{2m}^{(II)}(V, o)$ に $\{1, 2, \dots, 2m\}$ の分割を対応させる． $[z]$ に現れる辺 $\{o, z_1\}, \{z_1, z_2\}, \dots, \{z_{2m-1}, o\}$ に順に番号 $1, 2, \dots, 2m$ を当てて，同一の辺に対応する番号をまとめて分割のブロックとする．樹木上で元の点に戻ってくる歩道を考えているので，各ブロックは偶数個の数からなっている．このようにして得られる $\{1, 2, \dots, 2m\}$ の分割の全体を $\mathcal{P}_T(2m)$ とする．さて， $\vartheta \in \mathcal{P}_T(2m)$ とするとき， $|\vartheta| = e(H[z])$ であるから，

$$\begin{aligned} &\sum_{[z] \in \mathcal{S}_{2m}^{(II)}(V, o)} p^{e(H[z])} \\ &= \sum_{\vartheta \in \mathcal{P}_T(2m)} (n-1)(n-2) \cdots (n-|\vartheta|) p^{|\vartheta|}. \end{aligned}$$

ここで希薄極限をとれば,

$$\begin{aligned} \lim_{(1)} M_{2m}(\mu_{n,p}) &= \sum_{\vartheta \in \mathcal{P}_T(2m)} \kappa^{|\vartheta|} \\ &= \sum_{k=1}^m \left| \{ \vartheta \in \mathcal{P}_T(2m); |\vartheta| = k \} \right| \kappa^k \end{aligned} \quad (7)$$

となる. (5) と (7) によって, 平均スペクトル分布 $\mu_{n,p}$ のモーメント列の希薄極限の表示が得られた.

極限分布の解析的な表示は求まっていないようである^{4,9)}. (7) において和をとるべき ϑ が, すべてのブロックが偶数個の元からなる非交差分割に加えて, ある種の交差分割も含まれているところが課題である. 近似として, 交差分割を落としてしまえば, 対応する分布は対称化された自由ポアソン分布^{11,13)} を用いて表現できる.

大きな κ では, (7) の右辺の主要項の係数は

$$\left| \{ \vartheta \in \mathcal{P}_T(2m); |\vartheta| = m \} \right| = |\mathcal{P}_{\text{NCP}}(2m)|$$

である. 実際, $\vartheta \in \mathcal{P}_T(2m)$ が $|\vartheta| = m$ を満たせば, ϑ の各ブロックは 2 個の要素からなり, それは非交差対分割となるからである. したがって,

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \lim_{(1)} \kappa^{-m} M_{2m}(\mu_{n,p}) = M_{2m}(w)$$

が成り立つ. 言い換えれば, ランダム・グラフの平均スペクトル分布の希薄極限は, ウィグナーの半円則の 1 径数変形になっている.

上の議論は, ウィグナーの証明²⁰⁾ をグラフ的に見直したものである. 同じ方針でウィグナーの定理が証明できる (こちらのほうが易しい). 実際, (I) に対応する項は極限で消え, (II) に対応する項は容易に評価できてカタラン数が得られる.

参考文献

- 1) L. Accardi and M. Bożejko: Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 663–670.
- 2) 明出伊類似・尾畑伸明: 『量子確率論の基礎』 牧野書店, 2003.
- 3) L. Arnold: On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices, *J. Math. Anal. Appl.* **20** (1967), 262–268.
- 4) M. Bauer and O. Golinelli: Random incidence matrices: moments of the spectral density, *J. Statist. Phys.* **103** (2001), 301–337.
- 5) N. Biggs: “Algebraic Graph Theory (2nd Ed.)”, Cambridge University Press, 1993.
- 6) B. Bollobas: “Random Graphs”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- 7) M. Bożejko: Positive-definite kernels, length functions on groups and noncommutative von Neumann inequality, *Studia Math.* **XCIV** (1989), 107–118.
- 8) D.M. Cvetković, M. Doob and H. Sachs: “Spectra of Graphs”, Academic Press, 1979.
- 9) S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes and A.N. Samukhin: Random networks: eigenvalue spectra, *Physica A* **338** (2004), 76–83.
- 10) 日合文雄: 作用素環の自由積と自由確率論, *数学* **51** (1999), 377–394.
- 11) F. Hiai and D. Petz: “The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy”, Mathematical Surveys and Monographs 77, Amer. Math. Soc., Providence, 2000.
- 12) A. Hora, N. Obata: Asymptotic spectral analysis of growing regular graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- 13) A. Hora and N. Obata: “Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs”, Springer, to appear.
- 14) H. Kesten: Symmetric random walks on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), 336–354.
- 15) 増田直紀・今野紀雄: 『複雑ネットワークの科学』 産業図書, 2005.
- 16) 尾畑伸明: 量子確率論における独立性とグラフのスペクトル解析, *数学* **57** (2005), 1–20.
- 17) N. Obata: Positive Q -matrices of graphs, *Studia Math.*, to appear.
- 18) J.A. Shohat and J.D. Tamarkin: “The Problem of Moments”, Amer. Math. Soc., Providence, 1943.
- 19) D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica: “Free Random Variables”, CRM Monograph Series 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- 20) E.P. Wigner: Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions, *Ann. of Math.* (2) **62** (1955), 548–564.
- 21) E.P. Wigner: Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions II, *Ann. of Math.* (2) **65** (1957), 203–207.
- 22) E.P. Wigner: On the distribution of the roots of certain symmetric matrices, *Ann. of Math.* (2) **67** (1958), 325–327.

(おばた・のぶあき, 東北大学大学院情報科学研究科)