

グラフのスペクトル解析における量子確率論の手法

尾畑 伸明

東北大学大学院情報科学研究科

www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata

要旨

グラフの様々な構造を調べる上で、その隣接行列の固有値分布（スペクトル分布）は基本的であり、多くの結果の蓄積がある。近年、量子確率論の手法が導入され、特に、大きなグラフ（成長するグラフ）の漸近的スペクトル解析において興味深い結果が得られている。本報告では、拙著 [4, 23] にしたがって、量子確率論の基本的概念を紹介し、グラフのスペクトル解析への応用を概観する。

1 量子確率論の基礎概念

量子確率論 (quantum probability) は、非可換確率論 (noncommutative probability), あるいは代数的確率論 (algebraic probability) とも呼ばれる。その端緒はフォンノイマンの有名な著書「量子力学の数学的基礎」(1932) に見ることができ、言葉こそ違っているが、代数的確率空間を基礎とした新しい確率の計算方法が定式化された。量子確率論という名称の起源はここにあるのだが、後年、確率変数・確率過程・条件付確率・独立性・従属性・マルコフ性など確率論における基本概念が付け加わり、量子力学に限らず幅広い応用と結びつきながら今日に至っている。単に「確率論」というと、伝統的なコルモゴロフ流の確率論を指すのが普通であるが、本報告では、これを「古典確率論」と呼んで区別し、「量子確率論」はこれを含む広い理論体系として扱う。

1.1 代数的確率空間

複素数体 \mathbb{C} 上の代数 \mathcal{A} に対合と呼ばれる演算 $a \mapsto a^*$ を与えたものを $*$ -代数という。本報告では、つねに乗法の単位元 $1 = 1_{\mathcal{A}}$ の存在を仮定する。

定義 1.1 $*$ -代数 \mathcal{A} 上で定義された \mathbb{C} -値関数は、次の3つの性質を満たすとき、 \mathcal{A} 上の状態 (state) と呼ばれる。

- (i) $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ は線形関数。
- (ii) すべての $a \in \mathcal{A}$ に対して $\varphi(a^*a) \geq 0$ 。
- (iii) $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ 。

$*$ -代数 \mathcal{A} とその上で定義された状態 φ を組にした (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間 (algebraic probability space) という。

この概念は非常に広いものであって、 $*$ -代数に位相的な性質 (C^* 代数等) を仮定しない。これによって、確率論で自然に現れる非有界作用素 (ガウス型確率変数, ポアソン型確率変数, 生成作用素や消滅作用素など) を量子確率論の枠組みに取り込みやすくなる。

例 1.2 n 次複素行列の全体 $M(n, \mathbb{C})$ は $*$ -代数である. $\rho \in M(n, \mathbb{C})$ は, 次の 2 性質を満たすとき**密度行列**と呼ばれる.

- (i) 正 (定) 値である (つまり, $\rho = \rho^*$ ですべての固有値が ≥ 0).
- (ii) $\text{Tr } \rho = 1$.

密度行列 ρ に対して

$$\varphi(a) = \text{Tr}(\rho a), \quad a \in M(n, \mathbb{C}),$$

で定義される φ は $M(n, \mathbb{C})$ 上の状態になる. 逆に, $M(n, \mathbb{C})$ 上のすべて状態はこの形であり, 状態と密度行列は 1 対 1 対応する.

例 1.3 $M(n, \mathbb{C})$ は n 次元ヒルベルト空間 \mathbb{C}^n に行列の積で作用する. \mathbb{C}^n の内積は

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix},$$

によって定義する. 単位ベクトル $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$\varphi(a) = \langle \xi, a\xi \rangle, \quad a \in M(n, \mathbb{C}),$$

は $M(n, \mathbb{C})$ 上の状態になる. これを ξ に付随するベクトル状態という. $M(n, \mathbb{C})$ 上のベクトル状態は階数 1 の密度行列によって表現される.

例 1.4 (Ω, \mathcal{F}, P) を古典確率空間とする.

$$L^{\infty-}(\Omega) = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$$

はすべての次数のモーメントが有限になる \mathbb{C} -値確率変数の全体である. 明らかに, $L^{\infty-}(\Omega)$ は積で閉じており, 可換な $*$ -代数になる. 確率変数 X の平均値

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_X(dx)$$

は $L^{\infty-}(\Omega)$ 上の状態になる. したがって, $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbf{E})$ は代数的確率空間になる. これを古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) に対応する代数的確率空間と呼ぶ. 多くの問題では, 確率空間そのものより確率変数およびその分布が重要である. その意味で, 代数的確率空間 $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbf{E})$ には古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) のもつ (確率論的に本質的な) 情報がすべて移っている.

1.2 代数的確率変数

定義 1.5 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) が与えられたとき, 各 $a \in \mathcal{A}$ を**代数的確率変数**, または単に**確率変数**と呼ぶ. 特に $a = a^*$ をみたすときには**実確率変数**という.

確率変数 $a \in \mathcal{A}$ に対して, $\varphi(a^{\epsilon_1} a^{\epsilon_2} \cdots a^{\epsilon_m})$ の形の量を a の混合モーメントと総称する. ただし, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$, $m \geq 1$. 代数的確率変数の統計的性質は混合モーメントで与えられる. この意味で, 2つの代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) , (\mathcal{B}, ψ) の確率変数 a, b は, その混合モーメントがすべて一致するときに**確率同値**であるという.

実確率変数に対しては, モーメント列 $\{\varphi(a^m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ が確率変数を特徴づける ($m = 0$ のときは $a^0 = 1_{\mathcal{A}}$ とする). このとき,

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

をみたす \mathbb{R} 上のボレル確率測度 μ が存在する. 証明は $\{\varphi(a^m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ からつくられるハンケル行列式の正値性とハンブルガーの定理 [10, 38] による. (1.1) の μ を a の φ における分布という.

注意 1.6 (1.1) を満たす分布 μ の一意性は難しい問題 (モーメント問題) である. 簡単な十分条件としてカルレマン条件がよく知られている. すなわち, モーメント列 $\{M_m\}$ が

$$\sum_{m=0}^{\infty} M_{2m}^{-\frac{1}{2m}} = +\infty$$

を満たせば,

$$M_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

を満たす確率分布 (ボレル確率測度) μ は一意的に定まる [38]. たとえば, コンパクト台をもつ確率分布, ガウス分布やポアソン分布に対しては一意性が成り立つ.

例 1.7 $\mathcal{A} = M(2, \mathbb{C})$ とする.

$$\varphi(b) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} b = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}), \quad b = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと, (\mathcal{A}, φ) は代数的確率空間になる. 特に,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は実確率変数 ($a = a^*$) であり, そのモーメント列は,

$$\varphi(a^m) = \begin{cases} 1, & m \text{ が偶数のとき,} \\ 0, & m \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

で与えられる. 明らかに,

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 1, 2, \dots$$

したがって, a の分布は, ベルヌイ分布 $(\delta_{-1} + \delta_{+1})/2$ である. この意味で, a は (ふつうの) コイン投げの「確率モデル」を与えている.

定義 1.8 古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) で定義された確率変数 X に対して,

$$\varphi(a^m) = \mathbf{E}(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_X(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす代数的確率変数 a (と代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ)) を X の**代数的実現**と呼ぶ.

1.3 相互作用フォック確率空間

定義 1.9 実数の無限列 $\{\omega_n; n = 1, 2, \dots\}$ で, 次の条件 (i) または (ii) を満たすものを**ヤコビ数列**と呼ぶ.

- (i) [無限型] すべての $n \geq 1$ に対して $\omega_n > 0$.
- (ii) [有限型] ある番号 $m_0 \geq 1$ があつて, $\omega_1 > 0, \dots, \omega_{m_0-1} > 0, \omega_{m_0} = \omega_{m_0+1} = \dots = 0$.

有限型の場合は, m_0 番以降をカットして正数の有限列 (項数が 0 のものも含む) として扱うこともある.

ヤコビ数列 $\{\omega_n\}$ が与えられたとき, それが無限型か有限型かに応じて, 正規直交基底 $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\Phi_n\}_{n=0}^{m_0-1}$ をもつヒルベルト空間 $\Gamma(\mathbb{C})$ を考える. しばしば, Φ_0 は真空ベクトルと呼ばれる. 次に, $\Gamma(\mathbb{C})$ 上の線型作用素 B^{\pm} を

$$\begin{cases} B^+ \Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1}} \Phi_{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ B^- \Phi_0 = 0, \quad B^- \Phi_n = \sqrt{\omega_n} \Phi_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.2)$$

によって定義する. ただし, 有限型の場合は, $B^+ \Phi_{m_0-1} = 0$ とおく. B^{\pm} の定義域として $\{\Phi_n\}$ の張る線型部分空間をとる. このとき,

$$\langle \Phi_m, B^{\pm} \Phi_n \rangle = \langle B^{\mp} \Phi_m, \Phi_n \rangle, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立ち, この意味で B^{\pm} は互いに共役になる.

定義 1.10 $\{\omega_n\}$ をヤコビ数列とする. 上の述べたように, ヒルベルト空間 $\Gamma(\mathbb{C})$ と作用素 B^{\pm} を定義し, それらを組にした $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を $\{\omega_n\}$ に付随する**相互作用フォック空間**と呼ぶ. また, B^- を**消滅作用素**, B^+ を**生成作用素**と呼ぶ.

定義 1.11 相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ に対して, B^{\pm} で生成される $*$ -代数を相互作用フォック代数という. 相互作用フォック代数に真空状態 (真空ベクトル Φ_0 の定めるベクトル状態) を合わせたものを**相互作用フォック確率空間**と呼ぶ.

数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, 対角型作用素 α_{N+1} を

$$\alpha_{N+1} \Phi_n = \alpha_{n+1} \Phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

によって定義する. 問題 (たとえば, 隣接作用素の量子分解) によっては, B^\pm に加えて α_{N+1} によって生成される $*$ -代数を考える. これを $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ に付随する相互作用フォック代数という. 特に興味のある確率変数は,

$$B^+ + B^-, \quad (B^+ + \sqrt{\lambda})(B^- + \sqrt{\lambda}) \quad B^+ + B^- + \alpha_{N+1}$$

などである.

例 1.12 基本的な例は以下のとおりである.

フォック空間	ヤコビ数列	交換関係	$B^+ + B^-$ の分布
ボゾン	$\omega_n = n$	$B^-B^+ - B^+B^- = 1$	ガウス分布
フェルミオン	$\omega_1 = 1, \omega_2 = \dots = 0$	$B^-B^+ + B^+B^- = 1$	ベルヌイ分布
自由	$\omega_n \equiv 1$	$B^-B^+ = 1$	半円則
q -	$\omega_n = [n]_q$	$B^-B^+ - qB^+B^- = 1$	q -変形ガウス分布

ただし, q -フォック空間では $-1 \leq q \leq 1$ とし, $[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}$ は q -整数.

2 独立性と量子中心極限定理

2.1 独立性の諸定義

2つの古典確率変数 X, Y が独立であれば, 平均値の乗法性によって,

$$\mathbf{E}(XYXXYXY) = \mathbf{E}(X^4Y^3) = \mathbf{E}(X^4)\mathbf{E}(Y^3)$$

が成り立つ. 言い換えれば, 独立性は混合モーメントの計算ルールを与えているといえる. 代数的確率空間では, 確率変数の非可換性を反映した計算ルールがいろいろと考えられる. 以下に述べる4つの独立性は特に基本的であると思われるが, それ以外にもさまざまな「独立性」が議論されている [2, 3, 8, 27, 28, 29, 42, 43, 44].

さて, (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間とする. 独立性は, 確率変数の族というよりはむしろそれらが生成する $*$ -部分代数の族に対して定義しておいた方が便利である. (2つの古典確率変数 X, Y が独立であれば, それらの多項式 $p(X), q(Y)$ も独立になることを思い出そう.) そこで, \mathcal{A} の $*$ -部分代数の族 $\{\mathcal{A}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ の独立性を n 個の元

$$a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}, \quad a_i \notin \mathbb{C}1, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n, \quad n \geq 2, \quad (2.1)$$

に対する混合モーメント $\varphi(a_1 \cdots a_n)$ の計算ルールとして定義する.

定義 2.1 (可換独立) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が可換独立 (またはテンソル独立) であるとは, $\lambda_1 = \lambda_r$ となる $r \in \{2, \dots, n\}$ が存在しなければ,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

そのような r が存在するときは, そのうちで番号が最小のものをあらためて r として,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_2 \cdots a_{r-1}(a_1 a_r) a_{r+1} \cdots a_n).$$

定義 2.2 (自由独立 [41]) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が自由独立であるとは, (2.1) に加えて, $\varphi(a_2) = \cdots = \varphi(a_n) = 0$ であれば,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

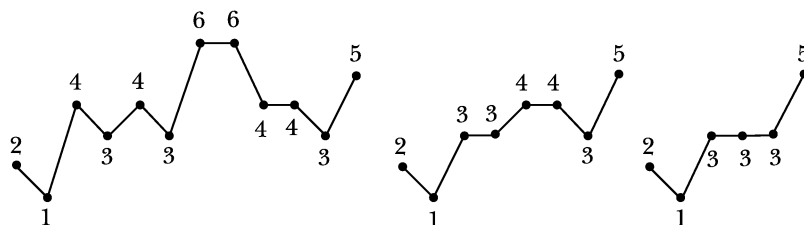
定義 2.3 (ブール独立 [39]) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ がブール (Boole) 独立であるとは,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

定義 2.4 (単調独立 [31, 32]) 添字の集合 Λ に全順序 $<$ が与えられているものとする. $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が単調独立であるとは, $\lambda_{i-1} < \lambda_i$ かつ $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ が成り立つような $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ があれば ($i = 1$ または $i = n$ に対しては条件の一方を落とす),

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_i)\varphi(a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_n).$$

ただし, \check{a}_i はその項が取り除かれていることを示す. たとえば,



$$\begin{aligned} \varphi(214343664435) &= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(21334435) \\ &= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(44)\varphi(213335) \\ &= \cdots \\ &= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(44)\varphi(2)\varphi(5)\varphi(333)\varphi(1) \end{aligned}$$

注意 2.5 ブール独立と単調独立の定義においては, $*$ -部分代数 \mathcal{A}_λ が \mathcal{A} の単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を含むことを仮定しない. $1_{\mathcal{A}}$ を含む $*$ -部分代数 \mathcal{A}_λ に対してその定義を適用すると, 自明な状況になる. たとえば, 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の2つの $*$ -部分代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を考え, $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_1$ を仮定する (\mathcal{A}_2 についてはどちらでもよい). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ がブール独立または単調独立であれば,

$$\varphi(a_2^* a_2) = \varphi(a_2 a_2^*) = |\varphi(a_2)|^2, \quad a_2 \in \mathcal{A}_2,$$

が成り立つ. したがって, a と $\varphi(a)1_{\mathcal{A}}$ が確率同値になる.

独立性の定義と明らかな等式

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots (a_i - \varphi(a_i)) \cdots a_n + \varphi(a_i) a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_n$$

を組み合わせれば, 一般の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ と $a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}$ に対しても $\varphi(a_1 \cdots a_n)$ を低次のモーメントで表示する公式が導かれる. 例を示そう. $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ が上の4つの意味で独立であるとき, $a \in \mathcal{A}_1, b \in \mathcal{A}_2$ に対して, $\varphi(aba)$ などの計算公式は以下のようなになる. (単調独立に必要な添字の順序は $1 < 2$ とする.)

	可換独立	自由独立	Boole 独立	単調独立
$\varphi(aba)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$	$\varphi(a)^2\varphi(b)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$
$\varphi(bab)$	$\varphi(a)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)\varphi(b)^2$	$\varphi(a)\varphi(b)^2$
$\varphi(abab)$	$\varphi(a^2)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)^2\varphi(b^2)$ $+\varphi(a^2)\varphi(b)^2$ $-\varphi(a)^2\varphi(b)^2$	$\varphi(a)^2\varphi(b)^2$	$\varphi(a^2)\varphi(b)^2$

例 2.6 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ をヒルベルト空間とする. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ の単位元を 1_n とおく. \mathcal{A}_n を

$$1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{n-1} \otimes S_n \otimes 1_{n+1} \otimes \cdots \otimes 1_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. また, φ_n を $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ 上の状態とする. このとき, $\{\mathcal{A}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)$ において可換独立である.

例 2.7 例 2.6 と同じ記号を用いる. 各ヒルベルト空間 \mathcal{H}_n から単位ベクトル Ω_n が 1 つずつ選ばれているものとし, それらが張る 1 次元部分空間への射影を P_n とする. \mathcal{A}_n を

$$P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1} \otimes S_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. このとき, $\{\mathcal{A}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \Omega_1 \otimes \cdots \otimes \Omega_N)$ においてブール独立である.

例 2.8 例 2.6 と同じ記号を用いる. \mathcal{M}_n を

$$1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{n-1} \otimes S_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. このとき, $\{\mathcal{M}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \psi \otimes \Omega_2 \otimes \cdots \otimes \Omega_N)$ において単調独立である. ここで ψ は $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ の任意の状態である.

例 2.9 ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の自由フォック空間を $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ とする. $\{e_n\}$ を \mathcal{H} の正規直交系として, $l(e_n), l^*(e_n)$ を e_n に付随する消滅作用素, 生成作用素とする. これらの生成する $*$ -部分代数を \mathcal{A}_n とおくと, $\{\mathcal{A}_n\}$ は真空状態 Ω において自由独立になる. これは自由独立性の基本的な例であるが, 詳細は省略する. [15, 41] などを見よ.

2.2 量子中心極限定理

古典確率論において, 確率変数列の極限挙動は基本的な問題であり, とりわけ中心極限定理の重要性はよく認識されている. 量子確率論においても同様である. a_1, a_2, \dots を代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の実確率変数列であり, 平均 $\varphi(a_n) = 0$, 分散 $\varphi(a_n^2) = 1$ のように正規化されているものとする. a_1, a_2, \dots が独立であるとき,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n$$

の分布を述べるのが中心極限定理である. 量子確率論では, \mathcal{A} の非可換性を反映して多様な独立性が考えられるが, ここでは前節で導入した 4 つの独立性に付随した量子中心極限定理を示すことにする.

一般に, 確率変数列の収束は次のように定義される.

定義 2.10 確率変数 a_n の属する代数的確率空間を $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ とし, 別の代数的確率空間 (\mathcal{B}, ψ) と $b \in \mathcal{B}$ があって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(a_n^{\epsilon_1} a_n^{\epsilon_2} \cdots a_n^{\epsilon_m}) = \psi(b^{\epsilon_1} b^{\epsilon_2} \cdots b^{\epsilon_m})$$

がすべての組合せ $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$, $m = 1, 2, \dots$, に対して成り立つとき, b を $\{a_n\}$ のモーメント極限または単に確率極限という. このとき, $\{a_n\}$ は b にモーメント収束または確率収束するという.

代数的確率変数 a_1, a_2, \dots, b が実確率変数であれば, それらの分布 μ_1, μ_2, \dots, μ が定義される. このとき, $\{a_n\}$ が b に確率収束するための必要十分条件は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

が成り立つことである.

注意 2.11 もし, μ がモーメント問題の一意解であれば, モーメント収束から確率測度の弱収束が従う. つまり, 任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mu(dx)$$

が成り立つ. (2.2) では $f(x)$ として多項式をとったことになる. 多項式の全体と有界連続関数の全体には包含関係はないことに注意しておこう.

定理 2.12 (量子中心極限定理) 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の確率変数列 $\{a_n\}$ が次の 3 条件を満たしているものとする.

- (i) a_n は実確率変数である. つまり $a_n = a_n^*$.
- (ii) a_n は正規化されている. つまり $\varphi(a_n) = 0$ かつ $\varphi(a_n^2) = 1$.
- (iii) $\{a_n\}$ は一様有界な混合モーメントをもつ. つまり, 各 $m \geq 1$ に対して,

$$\sup \{|\varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_m})|; n_1, \dots, n_m \geq 1\} < \infty. \quad (2.3)$$

さらに, a_n の生成する $*$ -部分代数を \mathcal{A}_n とするとき, それらが (1) 可換独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx,$$

(2) 自由独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4-x^2} dx,$$

(3) ブール独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx),$$

(4) 単調独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}} dx,$$

がすべての $m = 0, 1, 2, \dots$ で成り立つ. ここで現れた極限分布は, (1) ガウス分布, (2) 半円則, (3) ベルヌイ分布, (4) 逆正弦則.

証明は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{m/2}} \sum_{n \in \mathfrak{M}(m, N)} \varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_m})$$

を計算することによる. ただし, $\mathfrak{M}(m, N)$ は $\{1, \dots, m\}$ から $\{1, \dots, N\}$ への写像の全体のことである. 右辺の和において, それぞれの独立性の下で $N \rightarrow \infty$ で消えるものを取り除くことで, 極限值を具体的に求めることができ, それぞれの確率分布のモーメントに一致することが示される [4, 23]. ちなみに, 定理 2.12 に述べた 4 つの確率分布について, 奇数次のモーメントはいずれも消え, $2m$ 次のモーメントは次のようになる:

$$(1) \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad (2) \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \text{ (カタラン数)} \quad (3) 1 \quad (4) \frac{(2m)!}{2^m m! m!}$$

3 グラフのスペクトル解析

3.1 グラフの隣接行列と隣接代数

(単純無向) グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列とは, 頂点集合 V を添字集合とする行列 $A = (A_{xy})$ で

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & x \sim y, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

によって定義されるものをいう. ここで, 2 頂点 $x, y \in V$ が $\{x, y\} \in E$ を満たすとき, それらは隣接しているといい $x \sim y$ で表すこととした. 隣接行列はグラフの代数的表現として基本的である. 実際, 隣接行列はグラフを (同型を除いて) 再現する.

グラフ $G = (V, E)$ は, V が有限 ($|V| < \infty$) のとき有限グラフ, そうでないとき無限グラフと呼ばれる. 本報告では両方を扱うが, 無限グラフのときは局所有限性 (すべての $x \in V$ の次数について $\deg(x) < \infty$ となること) を仮定する. これによって, 隣接行列のべき乗 A^m が定義される. 実際, 行列の積の定義から

$$\begin{aligned} (A^m)_{xy} &= \sum_{x_1, \dots, x_{m-1} \in V} A_{xx_1} A_{x_1 x_2} \cdots A_{x_{m-1} y} \\ &= |\{x \text{ と } y \text{ を結ぶ長さ } m \text{ の歩道}\}| \end{aligned}$$

となる. ここで, x と y を結ぶ長さ m の歩道 (walk) とは頂点の有限列 $x_0, x_1, \dots, x_m \in V$ で $x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_{m-1} \sim x_m = y$ をみたすものをいう (x_0, x_1, \dots, x_m の中に一致する頂点があってもかまわない). こうして, A の複素係数多項式が定義され, その全体 $\mathcal{A}(G)$ は通常の行列演算で可換な $*$ -代数となる. これをグラフ G の隣接代数という.

一方, A はヒルベルト空間 $\ell^2(V)$ に自然な仕方で作用する. 各 $x \in V$ に対して, 1点集合 $\{x\}$ の定義関数を δ_x で表す. このとき, $\{\delta_x; x \in V\}$ は $\ell^2(V)$ の正規直交基底となる. それらの張る線形空間を $C_0(V)$ とすれば, A は $C_0(V)$ 上の線形作用素になる. このとき,

$$A\delta_x = \sum_{y \sim x} \delta_y, \quad x \in V,$$

が成り立ち, 特に,

$$A_{xy} = \langle \delta_x, A\delta_y \rangle$$

となる. グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列 A が $\ell^2(V)$ 上の有界線形作用素になるための必要十分条件は $\sup\{\deg x; x \in V\} < \infty$ である.

3.2 グラフに付随する代数的確率空間

隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ に状態 φ を考え合わせることで, 隣接行列 A を確率変数として取り扱うことができる. A の状態 φ における分布をグラフの φ におけるスペクトル分布という. 次の3つの状態に興味がある.

(a) **トレース** $G = (V, E)$ を有限グラフとする. 正規化されたトレース

$$\varphi_{\text{tr}}(a) = \frac{1}{|V|} \text{Tr } a, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

は, 隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ 上の状態になる. 隣接行列 A の φ_{tr} における分布は, グラフのスペクトル分布 (隣接行列 A の固有値分布) に一致する.

(b) **真空状態** 頂点 $o \in V$ に付随するベクトル状態が

$$\varphi_o(a) = \langle \delta_o, a\delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

で定義される. これを頂点 $o \in V$ に付随する真空状態という. A の φ_o における分布を μ とすれば,

$$\langle \delta_o, A^m \delta_o \rangle = \varphi_o(A^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots,$$

が成り立つ。したがって、分布 μ は o を出発して m ステップで o に戻る歩道の個数の積分表示に現れる。なお、真空状態を考えると、実際上、 $o \in V$ を含む連結成分だけを問題にすることになるから、はじめからグラフは連結であるものとする。

(c) **真空状態の1径数変形** (連結) グラフ $G = (V, E)$ の2頂点 $x, y \in V$ の距離を $\partial(x, y)$ で表わす。 $-1 \leq q \leq 1$ に対して、

$$Q = Q_q = (q^{\partial(x,y)})$$

によって定義される行列をグラフの Q -行列という。 $\mathcal{A}(G)$ 上の線形関数

$$\varphi_q(a) = \langle Q_q \delta_o, a \delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

は、フォック空間でいうコヒーレント状態に近い性質をもつ。 φ_q がどのような $q \in [-1, 1]$ に対して隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ 上の状態になるか (正值性 $\varphi_q(a^*a) \geq 0$ が問題) に興味がある。簡単な十分条件として (i) Q は V 上の正 (定) 値核であり、(ii) $AQ = QA$, を満たすことがすぐわかる。しかしながら、(i) が成り立つための条件はあまり知られていない [7, 36].

4 グラフの積構造と漸近的スペクトル

4.1 グラフの直積

2つのグラフ $G_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を考える。このとき、 $V = V^{(1)} \times V^{(2)}$ を頂点の集合とし、辺集合を

$$E = \left\{ \{(x, y), (x', y')\}; \begin{array}{l} \text{(i) } x = x', y \sim y'; \text{ または,} \\ \text{(ii) } x \sim x', y = y' \end{array} \right\}$$

で定義する。こうしてできるグラフ (V, E) を G_1 と G_2 の直積といい、 $G = G_1 \times G_2$ と書く。明らかに、 $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ と $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$ が成り立つ。これによって、2個以上のグラフの直積 $G_1 \times \cdots \times G_n$ が帰納的に定義される。

例 4.1 (整数格子) $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ (n 個の直積).

例 4.2 (ハミング・グラフ) $H(d, n) = K_n \times \cdots \times K_n$ (完全グラフ K_n の d 個の直積).

グラフ G_i の隣接行列を A_i とする。 A_i は $C_0(V^{(i)}) \subset \ell^2(V^{(i)})$ 上の線形作用素である。自然な対応で $C_0(V^{(1)} \times V^{(2)}) \cong C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)})$ であるから、 $G = G_1 \times G_2$ の隣接行列 A を $C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)})$ 上の作用素と考えることができる。

補題 4.3 G_1, G_2, \dots, G_n をグラフとし、それらの隣接行列を A_1, A_2, \dots, A_n とする。直積グラフ $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ の隣接行列 A は、 $C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)}) \otimes \cdots \otimes C_0(V^{(n)})$ 上の作用素として、次のように分解される:

$$A = \sum_{k=1}^n 1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{k-1} \otimes A_k \otimes 1_{k+1} \otimes \cdots \otimes 1_n. \quad (4.1)$$

例 2.6 で述べたように, (4.1) は直積型の状態に関して可換独立な確率変数の和になっている. したがって, 可換独立に関する中心極限定理を組み合わせれば, 直積グラフ $G^N = G \times \cdots \times G$ (N 個の直積) の漸近的スペクトル分布を求めることができる.

定理 4.4 $G = (V, E)$ をグラフとし, $o \in V$ を原点として固定する. その N 重直積 G^N の頂点 $o = o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態を $\langle \cdot \rangle$ とおく. G^N の隣接行列を $A^{(N)}$ とすると,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{(N)}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

証明 補題 4.3 によって,

$$A^{(N)} = \sum_{k=1}^N \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{k-1} \otimes A \otimes \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{N-k} \quad (4.2)$$

となる. 真空状態は直積型の状態であるから, 例 2.6 で述べたように (4.2) は真空状態に関して可換独立な確率変数の和であり, 各項は同じ分布をもつ. その平均と分散は,

$$\begin{aligned} \langle 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \rangle &= \langle A \rangle = \langle \delta_o, A \delta_o \rangle = 0, \\ \langle (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)^2 \rangle &= \langle A^2 \rangle = \langle \delta_o, A^2 \delta_o \rangle = \deg(o). \end{aligned}$$

で与えられる. したがって,

$$\frac{1}{\sqrt{\deg(o)}} 1^{\otimes(k-1)} \otimes A \otimes 1^{\otimes(N-k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

が正規化された実確率変数列となる. そうすれば, 可換独立に関する中心極限定理によって,

$$\frac{A^{(N)}}{\sqrt{N \deg(o)}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\deg(o)}} 1^{\otimes(k-1)} \otimes A \otimes 1^{\otimes(N-k)}$$

の分布は標準ガウス分布に近づく. ■

4.2 グラフの櫛形積

2つのグラフ 2つのグラフ $G_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を考え, それらの隣接行列を $A^{(i)}$ とする. また, G_2 には原点 $o \in V^{(2)}$ が定められているものとする. このとき, $V_1 \times V_2$ を頂点の集合として,

$$A_{(x,y),(x',y')} = A_{xx'}^{(1)} \delta_{yo} \delta_{y'o} + \delta_{xx'} A_{yy'}^{(2)}, \quad x, x' \in V^{(1)}, \quad y, y' \in V^{(2)}, \quad (4.3)$$

を隣接行列とする (連結な局所有限) グラフが得られる (図 1). これを G_1 と G_2 の櫛形積 (comb product) と呼び, $G_1 \triangleright_o G_2$ で表す. その隣接行列を $A^{(1)} \triangleright_o A^{(2)}$ と書く (混乱がなければ, 添字 o を省略する). 櫛形積は結合法則

$$(G_1 \triangleright_{o_2} G_2) \triangleright_{o_3} G_3 = G_1 \triangleright_{(o_2, o_3)} (G_2 \triangleright_{o_3} G_3)$$

を満たす. これを $G_1 \triangleright_{o_2} G_2 \triangleright_{o_3} G_3$ と略記する.

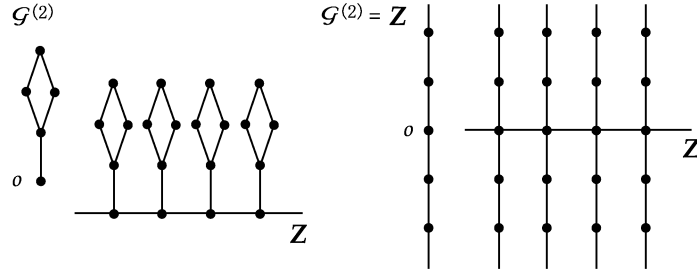


図 1: 櫛形グラフの例: $\mathbf{Z} \triangleright_o G_2$ と 2次元櫛形格子 $\mathbf{Z} \triangleright_o \mathbf{Z}$

補題 4.5 $G_n = (V^{(n)}, E^{(n)})$ が与えられ, 各グラフには原点 $o_n \in V^{(n)}$ が定まっているものとする. このとき, 櫛形積 $G_1 \triangleright_{o_2} G_2 \triangleright_{o_3} \cdots \triangleright_{o_N} G_N$ の隣接行列は $C_0(V^{(1)} \times \cdots \times V^{(N)}) \cong C_0(V^{(1)}) \otimes \cdots \otimes C_0(V^{(N)})$ 上の作用素であり, 次のように分解する:

$$A^{(1)} \triangleright A^{(2)} \triangleright \cdots \triangleright A^{(N)} = \sum_{n=1}^N 1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{n-1} \otimes A^{(n)} \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N. \quad (4.4)$$

ここで, P_n は $\ell^2(V^{(n)})$ から δ_{o_n} で張られる 1次元空間への射影である.

証明は (4.3) を用いた簡単な計算である. 例 2.8 で見たように, (4.4) の右辺はベクトル状態 $\delta_{o_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{o_N}$ に関して単調独立な確率変数の和になっている. そうすれば, 単調独立に関する中心極限定理 (定理 2.12) を適用して次の結果が得られる.

定理 4.6 ([1]) グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているとし, その N 重櫛形積 $G^{\triangleright N}$ の隣接行列を $A^{\triangleright N}$ とする. このとき, 頂点 $o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態において,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{\triangleright N}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

4.3 グラフの星形積

前節と同様に, 2つのグラフ G_i ($i = 1, 2$) を考える. 今度は双方の G_i に原点 $o_i \in V^{(i)}$ が定められているものとする. このとき, $V_1 \times V_2$ を添字とする行列

$$A_{(x,y),(x',y')} = A_{xx'}^{(1)} \delta_{y o_2} \delta_{y' o_2} + \delta_{x o_1} \delta_{x' o_1} A_{yy'}^{(2)}, \quad x, x' \in V^{(1)}, \quad y, y' \in V^{(2)}, \quad (4.5)$$

を考える. A は対角成分が 0, その他の成分が 0 と 1 のみからなる対称行列になる. したがって, A は (連結とは限らない) グラフの隣接行列である. このグラフの (o_1, o_2) を含む連結成分を G_1 と G_2 の星形積と呼び, $G_1 \star_{(o_1, o_2)} G_2$ で表す (図 2).

補題 4.7 N 個のグラフ $G_n = (V^{(n)}, E^{(n)})$ が与えられ, 各グラフには原点 $o_n \in V^{(n)}$ が定まっているものとする. このとき, 星形積 $G = (V, E) = G_1 \star G_2 \star \cdots \star G_N$ の隣接行列 A

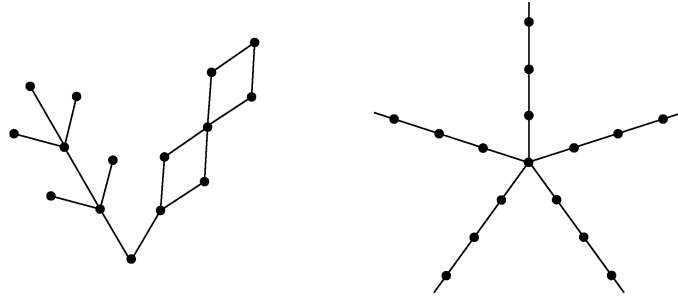


図 2: 星形グラフ (右は星形格子 \mathbf{Z}_+^{*5})

は $C_0(V) \subset C_0(V^{(1)}) \otimes \cdots \otimes C_0(V^{(N)})$ 上の作用素であり, 次のように分解する:

$$A = \sum_{n=1}^N P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1} \otimes A^{(n)} \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N. \quad (4.6)$$

証明は (4.5) を用いた簡単な計算である. そうすれば, 例 2.7 で見たように, (4.6) の右辺はベクトル状態 $\delta_{o_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{o_N}$ に関してブール独立な確率変数の和になっている. ブール独立に関する中心極限定理 (定理 2.12) を適用して次の結果が得られる.

定理 4.8 ([34]) グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているとし, その N 重星形積 $G^{\triangleright N}$ の隣接行列を A^{*N} とする. このとき, 頂点 $o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態において,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{*N}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

これまでに, 隣接行列を通してグラフの積構造と独立性を結びつけて議論してきた. 概ね次のようにまとめられる (自由独立性については省略).

	可換独立	自由独立	ブール独立	単調独立
中心極限分布	ガウス分布	半円則	ベルヌイ分布	逆正弦則
グラフの例	正方格子	等質樹木	星形グラフ	楕形グラフ

5 成長する正則グラフに対する漸近的スペクトル理論

5.1 直交多項式

実数 \mathbb{R} 上のボレル確率測度で, すべての次数のモーメントが有限になるものの全体を $\mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ とおく. $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に対して

$$M_m = M_m(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx) \quad (5.1)$$

によって定義される実数列 $\{M_0 = 1, M_1, \dots\}$ を μ のモーメント列という。以下、 $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ とする。単項式列 $1, x, x^2, x^3, \dots \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ にシュミットの直交化を施して得られる多項式列

$$P_0(x) = 1, \quad \dots, \quad P_n(x) = x^n + \dots, \quad \dots$$

を μ に付随する直交多項式という。

定理 5.1 (3 項間漸化式) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に付随する直交多項式とする。 μ の台が無限集合であれば、数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\alpha_n \in \mathbb{R}, \omega_n > 0$ を満たすものがあって、

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - \alpha_1, \\ xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

さらに、

$$\|P_0\| = 1, \quad \|P_n\| = \sqrt{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n}, \quad n \geq 1.$$

証明は容易 [10, 38]。したがって、 μ に付随する直交多項式 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、2 つの数列 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって完全に決定される。これら 2 つの数列を μ に (または $\{P_n\}$ に) 付随する **ヤコビ係数** と呼ぶことにする。明らかに、

$$\alpha_1 = M_1(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx), \quad \omega_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^2 \mu(dx).$$

つまり、 α_1 と ω_1 はそれぞれ μ の平均と分散である。

注意 5.2 確率分布 μ の台が丁度 $N + 1$ 個の点からなるときに限り、直交化の手続きが $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ の $N + 1$ 個の多項式を得た段階で終了する。そのとき、(5.2) は $P_{N+1} = 0$ として成り立ち、ヤコビ係数は 2 組の有限数列 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N+1}\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ になる。最後の番号の定数は、(5.2) において $P_{N+1} = 0$ として決定される。以下では、直交多項式 $\{P_n\}$ が無限列の場合に即した記述をするが、有限列 $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ に帰着している場合の変更は容易である。

定理 5.3 $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ のヤコビ係数を $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ とする。もし、 μ がモーメント問題の一意解であれば、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(dx)}{z - x} = \frac{1}{z - \alpha_1} - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2} - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3} - \frac{\omega_3}{z - \alpha_4} - \dots \quad (5.3)$$

が成り立つ。ただし、右辺の連分数は $\{\text{Im } z \neq 0\}$ で収束する。

(5.3) の左辺は、(有限なモーメントをもつとは限らない) すべての確率分布 μ に対して定義される。これを μ の **スチルチェス変換** といい、 $G_\mu(z)$ と書く。 $G_\mu(z)$ は $\{\text{Im } z \neq 0\}$ で正則である。このとき、

$$-\frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \int_s^t \text{Im } G_\mu(x + iy) dx = \mu(\{s\}) + \mu(\{t\}) + 2\mu((s, t)), \quad s < t$$

が成り立つ. これを**スチルチェス逆変換**という. μ の絶対連続部分 $\rho(x)dx$ は,

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \operatorname{Im} G_\mu(x + iy)$$

で与えられる. さらに, (5.3) の第 n 近似分数

$$\frac{1}{z - \alpha_1} - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2} - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3} - \frac{\omega_3}{z - \alpha_4} - \cdots - \frac{\omega_n}{z - \alpha_{n+1}} = \frac{Q_n(z)}{P_{n+1}(z)}$$

で, 分母・分子ともに最高次の係数を 1 と基準化すれば, 分母の多項式が μ に付随する直交多項式に一致する. なお, $\{Q_n\}$ は μ の (または $\{P_n\}$ の) 随伴直交多項式と呼ばれる.

5.2 実確率変数の量子分解

古典確率変数 X で分布 μ が $\mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に属するものを考えよう. この μ に付随する直交多項式を $\{P_n\}$, ヤコビ係数を $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ とする. $\{\omega_n\}$ はヤコビ数列なので, それに付随する相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を考える. 等距離作用素 $U : \Gamma(\mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$ が

$$U : \sqrt{\omega_n \cdots \omega_2 \omega_1} \Phi_n \mapsto P_n$$

によって定義される (U は必ずしもユニタリではないことに注意). $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ において x による掛け算作用素を Q で表す. 相互作用フォック空間の定義と直交多項式の満たす 3 項間漸化式を比較すれば,

$$Q = U(B^+ + B^- + B^\circ)U^*, \quad B^\circ = \alpha_{N+1},$$

が容易にわかる. したがって,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx) = \langle P_0, Q^m P_0 \rangle = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Phi_0 \rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

一方, μ は X の分布なので, (5.4) は $\mathbf{E}(X^m)$ に等しい. よって, 代数的確率変数として

$$X = B^+ + B^- + B^\circ \quad (5.5)$$

が成り立つ. これを X の**量子分解**, $\{B^+, B^-, B^\circ\}$ をその量子成分という.

例 5.4 例 1.12 で述べた $B^+ + B^-$ はそれぞれの分布をもつ古典確率変数の量子分解を与えている.

ここでは, 古典確率空間で定義された確率変数 X の量子分解として話を進めてきたが, 代数的確率空間における実確率変数 a も同様にして量子分解される. X や a の分布を議論するとき, それらが生成する可換 $*$ -代数を使っているといえる. 確率変数を量子分解して量子成分を取り出すと, それらは互いに非可換である. したがって, 量子成分を扱うためには, その可換 $*$ -代数の非可換拡張を考えることになる. 問題によっては, この非可換拡張が有効に使えるのである. この実例を次節で扱う.

5.3 グラフの階層化と隣接行列の量子分解

グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているものとする. このとき, グラフには自然な階層構造が導入される:

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{x \in V; \partial(o, x) = n\}. \quad (5.6)$$

ある番号 $m \geq 1$ で $V_m = \emptyset$ となれば, その先 $n \geq m$ すべてで $V_n = \emptyset$ となる. (5.6) にしたがって, 隣接行列 A の量子成分を定義しよう. $x \in V_n$ として

$$(A^\epsilon)_{yx} = \begin{cases} A_{yx} = 1, & y \sim x \text{ かつ } y \in V_{n+\epsilon}, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases} \quad \epsilon \in \{+, -, 0\}.$$

ただし, $n + \epsilon$ は $\epsilon = +, -, 0$ に応じて, $n + 1, n - 1, n$ を意味する (図 3). 明らかに, $(A^+)^* = A^-$, $(A^0)^* = A^0$ および

$$A = A^+ + A^- + A^0 \quad (5.7)$$

が成り立つ. (5.7) を A の量子分解という. 量子分解はグラフの階層化 (つまり, 原点 $o \in V$ のとり方) に依存して定まる.

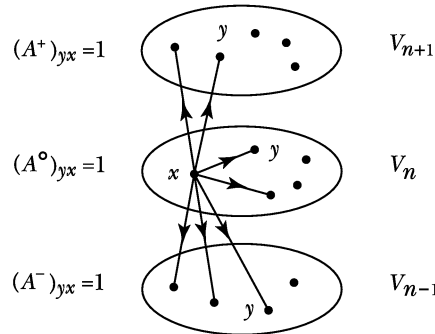


図 3: 量子分解: $A = A^+ + A^- + A^0$

次に, $V_n \neq \emptyset$ なる $n \geq 0$ に対して

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x$$

とおくと, $\{\Phi_n\}$ は $\ell^2(V)$ の正規直交系となる. $\{\Phi_n\}$ によって張られる $\ell^2(V)$ の閉部分空間 $\Gamma(G)$ をグラフ G の階層化 (5.6) に付随するフォック空間と呼ぶことにする. 一般には, $\Gamma(G)$ は, A の量子成分に関して不変であるとは限らない. 興味があるのは,

- (i) $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して不変である場合;
- (ii) $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して漸近的に不変である場合;

である. (i) のときは, $(\Gamma(G), A^\pm)$ が相互作用フォック空間になり, $A = A^+ + A^- + A^\circ$ の分布は前節で述べた方法で求めることができる. (ii) については, 節をあらためて述べる. すべての距離正則グラフは条件 (i) を満たす. 次はその典型例である.

例 5.5 (ケステン分布) 次数 $\kappa \geq 2$ の等質樹木 \mathcal{T}_κ の隣接行列を $A = A_\kappa$ とする. 原点 o を定め, 付随するフォック空間 $\Gamma(\mathcal{T}_\kappa)$ とその正規直交基底 $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$ を上のように定める. 簡単な計算によって,

$$\begin{cases} A\Phi_0 = \sqrt{\kappa}\Phi_1, \\ A\Phi_1 = \sqrt{\kappa}\Phi_0 + \sqrt{\kappa-1}\Phi_2, \\ A\Phi_n = \sqrt{\kappa-1}\Phi_{n-1} + \sqrt{\kappa-1}\Phi_{n+1}, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (5.8)$$

がわかる. $\Gamma(\mathcal{T}_\kappa)$ は A の量子成分 A^\pm で不変であり, $(\Gamma(\mathcal{T}_\kappa), A^\pm)$ は相互作用フォック空間になる. (5.8) から Jacobi 係数 $\{\alpha_n \equiv 0\}$, $\{\omega_1 = \kappa, \omega_2 = \omega_3 = \dots = \kappa - 1\}$ が求まる. これらを係数とする連分数 (5.3) を計算すれば, A の Φ_0 における分布が求められる:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0, A^m \Phi_0 \rangle &= \int_{-2\sqrt{\kappa-1}}^{+2\sqrt{\kappa-1}} x^m \rho_\kappa(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \rho_\kappa(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa \sqrt{4(\kappa-1) - x^2}}{\kappa^2 - x^2}, \quad |x| \leq 2\sqrt{\kappa-1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

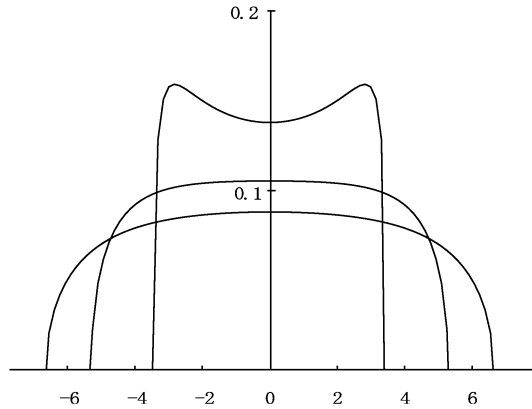


図 4: ケステン分布: $\rho_4, \rho_8, \rho_{12}$

Kesten [26] は, N 個の生成元をもつ自由群の Cayley グラフ (次数 $2N$ の等質樹木) において, 推移行列 $P_N = (2N)^{-1} A_{2N}$ の δ_e における分布を導いた. それは, (5.9) に簡単なスケール変換を施すことで得られる. また, ケステン分布を分散が 1 になるように正規化して, $\kappa \rightarrow \infty$ とすると半円則に収束する. これは, グラフの自由積と自由独立性に関する中心極限定理の特別な場合にあたる.

5.4 $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して漸近的に不変である場合

整数格子 \mathbb{Z}^N で説明しよう. 隣接行列を A_N とする. 原点を $o = (0, \dots, 0)$ とし, δ_o における A_N のスペクトル分布の高次元極限 $N \rightarrow \infty$ に興味がある. \mathbb{Z}^N を

$$\mathbb{Z}^N = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{x \in \mathbb{Z}^N; \partial(x, o) = n\},$$

のように階層化して, 各階層に対応する単位ベクトル $\Phi_n \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ を

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

で定義する. 任意の頂点 $x \in V$ に隣接する点は, すぐ上または下の階層にだけ存在することから, 隣接行列 A_N の量子分解は,

$$A_N = A_N^+ + A_N^-$$

で与えられる. 簡単な考察によって,

$$\begin{aligned} \frac{A_N^+}{\sqrt{2N}} \Phi_n &= \sqrt{n+1} \Phi_{n+1} + O(N^{-1/2}), \\ \frac{A_N^-}{\sqrt{2N}} \Phi_n &= \sqrt{n} \Phi_{n-1} + O(N^{-1}), \end{aligned}$$

が得られる. つまり, $\Gamma(\mathbb{Z}^N)$ は A_N の量子成分 A_N^\pm で不変ではないが, $N \rightarrow \infty$ において「ほぼ」不変である. そのおかげで,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N^\pm}{\sqrt{2N}} = B^\pm$$

はボゾン・フォック空間の生成・消滅作用素の作用に一致する. さらに, ボゾン・フォック空間において $B^+ + B^-$ の真空状態における分布は標準ガウス分布であることが知られているので,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \delta_o, \left(\frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \delta_o \right\rangle &= \langle \Omega, (B^+ + B^-)^m \Omega \rangle_{\text{Boson}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, Ω はボゾン・フォック空間の真空ベクトルである. つまり, 整数格子 \mathbb{Z}^N の隣接行列 A_N の真空状態におけるスペクトル分布は標準ガウス分布に漸近する. この結果は可換独立性を用いた議論でも導かれている (4.1 節).

上に述べてきた \mathbb{Z}^N に対する考察を一般化して, 成長する正則グラフ $G^{(\nu)} = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})$ の漸近的スペクトルを求めることができる. ここで ν は成長を表すパラメータであり, あ

る有向集合を走るものとする。以降では、考える極限を $\nu \rightarrow \infty$ のように簡単に書くことにする。まず、

$$\omega_\epsilon(x) = \{y \in V; \partial(o, y) = \partial(o, x) + \epsilon\}, \quad \epsilon \in \{+, -, 0\}$$

として、 ω_ϵ の各階層 V_n における3つの統計量を

$$\begin{aligned} M(\omega_\epsilon|V_n) &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |\omega_\epsilon(x)| \\ \Sigma^2(\omega_\epsilon|V_n) &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \{|\omega_\epsilon(x)| - M(\omega_\epsilon|V_n)\}^2 \\ L(\omega_\epsilon|V_n) &= \max\{|\omega_\epsilon(x)|; x \in V_n\} \end{aligned}$$

で定義する。次に、これらの統計量が $\nu \rightarrow \infty$ でどのように挙動するかの変定をおく。簡単のため $\kappa(\nu) = \deg(G^{(\nu)})$ とおく。

$$(A1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \kappa(\nu) = \infty.$$

(A2) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} M(\omega_-|V_n^{(\nu)}) \equiv \omega_n < \infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Sigma^2(\omega_-|V_n^{(\nu)}) = 0, \quad \sup_{\nu} L(\omega_-|V_n^{(\nu)}) < \infty.$$

(A3) 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{M(\omega_0|V_n^{(\nu)})}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \equiv \alpha_{n+1} < \infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Sigma^2(\omega_0|V_n^{(\nu)})}{\kappa(\nu)} = 0, \quad \sup_{\nu} \frac{L(\omega_0|V_n^{(\nu)})}{\sqrt{\kappa(\nu)}} < \infty.$$

定理 5.6 (量子中心極限定理) $\{G^{(\nu)} = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$ を成長する正則グラフで (A1)–(A3) を満たすものとする。 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Psi_n\}, B^+, B^-)$ を $\{\omega_n\}$ に付随する相互作用フォック空間とし、 B^0 を $\{\alpha_n\}$ に付随する対角作用素とする。このとき、すべての $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{+, -, 0\}$ と $m = 1, 2, \dots, j, n = 0, 1, 2, \dots$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_\nu^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \langle \Psi_j, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_1} \Psi_n \rangle.$$

証明は、量子成分の作用の主要項が相互作用フォック空間で記述され、剰余項の作用が極限で消えることを示すことにある。詳しくは [24] を見よ。定理 5.6 を隣接行列 $A_\nu = A_\nu^+ + A_\nu^- + A_\nu^0$ に適用すれば、次の結果が得られる。

定理 5.7 定理 5.6 の仮定の下で、

$$\begin{aligned} \lim_{\nu} \left\langle \delta_0, \left(\frac{A_\nu}{\sqrt{\deg(G^{(\nu)})}} \right)^m \delta_0 \right\rangle &= \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^0)^m \Psi_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

よって、 $A_\nu / \sqrt{\deg(G^{(\nu)})}$ の真空状態におけるスペクトル分布は、ヤコビ係数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ で定まる確率分布に (モーメントの意味で) 収束する。

注意 5.8 定理 5.6–5.7 は Q 行列による真空状態の 1 径数変形に拡張される [24].

ここに述べた成長グラフに対する量子中心極限定理は、個別の議論で得られた多くの具体例を統一するものとなった.

グラフ	IFS	真空状態	その 1 径数変形
Hamming graphs $H(d, N)$	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian ($N/d \rightarrow 0$) Poisson ($N/d \rightarrow \lambda^{-1} > 0$)	Gaussian or Poisson
Johnson graphs $J(v, d)$	$\omega_n = n^2$	exponential ($2d/v \rightarrow 1$) geometric ($2d/v \rightarrow p \in (0, 1)$)	‘Poissonization’ of exponential distribution
odd graphs O_k	$\omega_{2n-1} = n$ $\omega_{2n} = n$	two-sided Rayleigh	?
homogeneous trees \mathcal{T}_κ	$\omega_n = 1$ (free)	Wigner semicircle	free Poisson
integer lattices \mathbb{Z}^N	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian	Gaussian
symmetric groups \mathfrak{S}_n (Coxeter)	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian	Gaussian
Coxeter groups (Fendler)	$\omega_n = 1$ (free)	Wigner semicircle	free Poisson
Spidernets $S(a, b, c)$	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = \dots = q$	free Meixner law	(free Meixner law)

5.5 コメント

隣接行列 A_ν の量子成分 A_ν^ϵ に対して、その漸近挙動を記述する相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を構成し、 $B^+ + B^- + B^\circ$ の分布から A_ν の漸近的スペクトルを導出した。この方法によれば、組合せ論的な問題が極限移行した後に現れるので、有限の ν で直面する組合せ論的な問題 (こちらのほうが込み入っていることが多い) を回避することができる。

本稿で扱ってきた「グラフの漸近的スペクトル解析」の端緒は Hora [16] にある。ここでは、量子分解によらず、古典的な結果 [5] を援用して距離正則グラフの隣接行列の漸近的スペクトルが導出された。それに示唆されて、Hashimoto–Obata–Tabei [14] は量子分解の方法をハミング・グラフに適用し、古典的手法に現れる組合せ論的議論なしに極限分布 (Gauss 分布と Poisson 分布) が導出できることを示した。Hashimoto [12] は同様な方法を Cayley グラフに適用して一般論を展開した。量子分解のアイデアそのものは素朴なもので、これまでもさまざまな文脈に現れているが、隣接行列や古典確率変数を量子確率論の枠組みで解析するための方法として、「量子分解」という言葉を初めて使ったのは Hashimoto [12] である。

量子分解の手法が有効であるのは、 $\Gamma(G_\nu)$ が A_ν^ϵ に関して「漸近的に」不変であるときに限る。そうでないときに量子分解の手法を拡張することは興味深い問題である。多変数

の直交多項式も関連してくるであろう。

成長するグラフは複雑ネットワークのモデルとしても興味がある [9]。グラフの成長を、各時刻で「独立増分」が付け加わってゆくような形で定式化できると面白いと思う。本稿で論じてきたグラフの「積構造」と量子確率論の「独立性」の関連を発展させることでヒントが得られるかも知れない。それに関連して、ランダム・グラフ [6] への適用も興味深い研究テーマであろう。

謝辞

本シンポジウムで講演する機会をくださった関係者の方々に感謝します。距離正則グラフやアソシエーション・スキームなどに関連して、量子確率論の広がり期待できる有益なコメントをくださった坂内英一氏、伊藤達郎氏、鈴木寛氏、宗政昭弘氏、田中太初氏に感謝いたします。

参考文献

- [1] L. Accardi, A. Ben Ghorbal and N. Obata: *Monotone independence, comb graphs and Bose-Einstein condensation*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **7** (2004), 419–435.
- [2] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Notions of independence related to the free group*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 201–220.
- [3] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Singleton independence*, *Banach Center Publ.* **43** (1998), 9–24.
- [4] 明出伊類似・尾畑伸明: 量子確率論の基礎, 数理情報科学シリーズ 21, 牧野書店, 2003.
- [5] E. Bannai and T. Ito: “Algebraic Combinatorics I: Association Schemes,” Perseus Books, 1984.
- [6] M. Bauer and O. Golinelli: *Random incidence matrices: moments of the spectral density*, *J. Statist. Phys.* **103** (2001), 301–337.
- [7] M. Bożejko: *Positive-definite kernels, length functions on groups and noncommutative von Neumann inequality*, *Studia Math.* **XCIV** (1989), 107–118.
- [8] M. Bożejko and R. Speicher: *ψ -independence and symmetrized white noise*, in “Quantum Probability and Related Topics VI (L. Accardi, Ed.),” pp. 170–186, World Scientific, Singapore, 1991.
- [9] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukhin: *Random networks: eigenvalue spectra*, *Physica A* **338** (2004), 76–83.
- [10] T. S. Chihara: “An Introduction to Orthogonal Polynomials,” Gordon and Breach, 1978.
- [11] Y. Hashimoto: *Deformations of the semicircle law derived from random walks on free groups*, *Prob. Math. Stat.* **18** (1998), 399–410.
- [12] Y. Hashimoto: *Quantum decomposition in discrete groups and interacting Fock spaces*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **4** (2001), 277–287.
- [13] Y. Hashimoto, A. Hora and N. Obata: *Central limit theorems for large graphs: Method of quantum decomposition*, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 71–88.

- [14] Y. Hashimoto, N. Obata and N. Tabei: *A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs*, in “Quantum Information III (T. Hida and K. Saitô, Eds.),” pp. 45–57, World Scientific, 2001.
- [15] F. Hiai and D. Petz: “The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy,” Amer. Math. Soc., 2000.
- [16] A. Hora: *Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 221–246.
- [17] A. Hora: *Central limit theorem for the adjacency operators on the infinite symmetric group*, *Commun. Math. Phys.* **195** (1998), 405–416.
- [18] A. Hora: *Gibbs state on a distance-regular graph and its application to a scaling limit of the spectral distributions of discrete Laplacians*, *Probab. Theory Relat. Fields* **118** (2000), 115–130.
- [19] A. Hora: *A noncommutative version of Kerov’s Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, in “Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics (A. M. Vershik, Ed.),” pp. 77–88, *Lect. Notes in Math.* Vol. 1815, Springer–Verlag, 2003.
- [20] A. Hora: *Scaling limit for Gibbs states for Johnson graphs and resulting Meixner classes*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **6** (2003), 139–143.
- [21] A. Hora and N. Obata: *Quantum decomposition and quantum central limit theorem*, in “Fundamental Problems in Quantum Physics (L. Accardi and S. Tasaki, Eds.),” pp. 284–305, World Scientific, 2003.
- [22] A. Hora and N. Obata: *An interacting Fock space with periodic Jacobi parameter obtained from regular graphs in large scale limit*, in “Quantum Information V (T. Hida and K. Saitô, Eds.),” pp. 121–144, World Scientific, 2006.
- [23] A. Hora and N. Obata: “Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs,” Springer, 2007.
- [24] A. Hora, N. Obata: *Asymptotic spectral analysis of growing regular graphs*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 899–923.
- [25] D. Igarashi and N. Obata: *Asymptotic spectral analysis of growing graphs: Odd graphs and spiders*, *Banach Center Publications* **73** (2006), 245–265.
- [26] H. Kesten: *Symmetric random walks on groups*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** (1959), 336–354.
- [27] R. Lenczewski: *On sums of q -independent $SU_q(2)$ quantum variables*, *Commun. Math. Phys.* **154** (1993), 127–134.
- [28] R. Lenczewski: *Unification of independence in quantum probability*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 383–405.
- [29] R. Lenczewski: *On noncommutative independence*, in “QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., Vol. 18,” pp. 320–336, World Scientific, 2005.
- [30] S. Liang, N. Obata and S. Takahashi: *Asymptotic spectral analysis of generalized Erdős–Rényi random graphs*, *Banach Center Publications* **78** (2007), 211–229.
- [31] Y.-G. Lu: *An interacting free Fock space and the arcsine law*, *Probab. Math. Stat.* **17** (1997), 149–166.

- [32] N. Muraki: *Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space*, Commun. Math. Phys. **183** (1997), 557–570.
- [33] N. Muraki: *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **4** (2001), 39–58.
- [34] N. Obata: *Quantum probabilistic approach to spectral analysis of star graphs*, Interdiscip. Inform. Sci. **10** (2004), 41–52.
- [35] 尾畑伸明: 量子確率論における独立性とグラフのスペクトル解析, 数学 **57** (2005), 1–20.
- [36] N. Obata: *Positive Q -matrices of graphs*, Studia Math. **179** (2007), 81–97.
- [37] N. Obata: *Notions of independence in quantum probability and spectral analysis of graphs*, Amer. Math. Soc. Transl. **223** (2008), 115–136.
- [38] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin: “The Problem of Moments,” Amer. Math. Soc., 1943.
- [39] R. Speicher and R. Woroudi: *Boolean convolution*, in “Free Probability Theory (D. Voiculescu, Ed.),” pp. 267–279, Fields Inst. Commun. Vol. 12, Amer. Math. Soc., 1997.
- [40] H. van Leeuwen and H. Maassen: *A q deformation of the Gauss distribution*, J. Math. Phys. **36** (1995), 4743–4756.
- [41] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica: “Free Random Variables,” CRM Monograph Series 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- [42] J. Wysoczański: *Monotonic independence associated with partially ordered sets*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **10** (2007), 17–41.
- [43] J. Wysoczański: *bm -independence and central limit theorems associated with symmetric cones*, Banach Center Publ. **78** (2007), 315–320,
- [44] J. Wysoczański: *bm -central limit theorems for positive definite real symmetric matrices*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **11** (2008), 33–51.