

量子確率論とグラフのスペクトル解析

尾畑伸明 (東北大学大学院情報科学研究科)

<http://www.math.is.tohoku.ac.jp/~obata>

はじめに

量子確率論は非可換確率論, あるいは代数的確率論とも呼ばれる. 単に確率論というと, 伝統的なコルモゴロフ流の確率論を指すのが普通であるが, 本稿では, これを古典確率論と呼んで区別する. 古典確率論は確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) を基礎として展開されるが, 量子確率論は代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) を出発点とする. 代数的確率空間は, 古典確率論における確率空間を捨象し, 確率変数のなす (可換) 代数と平均値 E のもつ性質を抽象することで得られる概念である. もちろん, この理論の興味は非可換な \mathcal{A} を扱うところにある.

量子確率論は, フォンノイマンの有名な著書「量子力学の数学的基礎」(1932) によって拓かれたといえる. そこでは, 言葉こそ違っているが, 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) を基礎とした新しい確率の計算方法が定式化された. その後, 確率論において基本的である確率変数・確率過程・条件付確率・独立性・従属性・マルコフ性などの概念が付け加わり, 理論と応用に急速な広がりを見せながら今日に至っている. 量子確率論という名称は, 量子力学の統計的諸問題に関する伝統的な研究を今日に引き継ぐものであるが, 一方で, 純粹数学的な興味からさまざまな拡張や応用が議論されている. たとえば, 自由独立性を基に構築される自由確率論 [29, 30, 72] は, やはりフォンノイマンの研究から派生して大きく発展したものだといえよう. 題目にある量子確率論は広い意味にとっていただきたい.

この講義では,

- 第 1 回 量子確率論の基礎概念から始め, 多様な独立性と付随する中心極限定理を説明する;
- 第 2 回 グラフの隣接行列を通して, グラフの「積構造」と「独立性」を結びつけ, グラフの漸近的なスペクトルを中心極限定理の系として導く;
- 第 3 回 実確率変数の量子分解というアイデアを, 成長する正則グラフの漸近的スペクトル解析に応用する;

ことを通じて, 量子確率論について知ってもらいたいと思う. 特に, 量子確率論は古典的な問題を非可換な世界を経由して議論するための枠組みとしても有用であり, さらなる発展が期待できよう. 直接の参考文献は, 次の 2 冊である:

1. 明出伊類似・尾畑伸明: 量子確率論の基礎, 数理情報科学シリーズ 21, 牧野書店, 2003.
2. A. Hora and N. Obata: “Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs,” Springer, 2007.

本稿では全く触れていないが, 量子確率論の解析的側面 (量子確率解析) も重要な研究テーマである. 時間とともに変化するランダム現象のモデルとしてなくてはならないのが

確率過程論であり, その基盤に伊藤解析がある. 伊藤解析は, 今日では, 無限個の変数を扱う微分積分学 (超関数も含む) として発展して, 無限次元確率解析とも呼ばれる大きな潮流になっている. これと同様に, 伊藤解析の量子的拡張 [41] を皮切りに, 量子確率解析が展開されている [52, 57]. 最近では, 量子確率論と無限次元解析の融合的研究 (無限個の非可換変数を扱う微分積分学という趣である) として進展している [5, 20, 43, 44, 62].

目次

1	量子確率論の基礎概念	3
1.1	代数的確率空間	3
1.2	代数的確率変数	5
1.3	相互作用フォック確率空間	7
2	独立性と量子中心極限定理	9
2.1	独立性の諸定義	9
2.2	コメント: 合成積	12
2.3	シングルトン条件	12
2.4	量子中心極限定理	14
2.5	独立性をめぐる研究の流れ	15
3	グラフのスペクトル解析	16
3.1	グラフと隣接行列	16
3.2	グラフに付随する代数的確率空間	18
4	グラフの積構造と漸近的スペクトル	20
4.1	グラフの直積	20
4.2	グラフの楕形積	21
4.3	グラフの星形積	22
5	成長する正則グラフに対する漸近的スペクトル理論	24
5.1	直交多項式	24
5.2	実確率変数の量子分解	27
5.3	グラフの階層化と隣接行列の量子分解	28
5.4	$\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して漸的に不変である場合	30
5.5	コメント	33
	参考文献	34

1 量子確率論の基礎概念

1.1 代数的確率空間

複素数体 \mathbb{C} 上の代数 \mathcal{A} に対合と呼ばれる演算 $a \mapsto a^*$ を与えたものを $*$ -代数という。本稿では、つねに乗法の単位元 $1 = 1_{\mathcal{A}}$ の存在を仮定する。

定義 1.1 $*$ -代数 \mathcal{A} 上で定義された \mathbb{C} -値関数は、次の3つの性質を満たすとき、 \mathcal{A} 上の状態 (state) と呼ばれる。

- (i) φ は線形関数。
- (ii) すべての $a \in \mathcal{A}$ に対して $\varphi(a^*a) \geq 0$ 。
- (iii) $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ 。

定義 1.2 $*$ -代数 \mathcal{A} とその上で定義された状態 φ を組にした (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間 (algebraic probability space) という。

この概念は非常に広いものであって、 $*$ -代数に位相的な性質 (C^* 代数等) を仮定しない。これによって、確率論で自然に現れる非有界作用素 (ガウス型確率変数, ポアソン型確率変数, 生成作用素や消滅作用素など) を量子確率論の枠組みに取り込み見やすくなる。

例 1.3 n 次複素行列の全体 $M(n, \mathbb{C})$ は $*$ -代数である。 $\rho \in M(n, \mathbb{C})$ は、次の2性質を満たすとき密度行列と呼ばれる。

- (i) 正 (定) 値である (つまり、 $\rho = \rho^*$ ですべての固有値が ≥ 0)。
- (ii) $\text{Tr} \rho = 1$ 。

密度行列 ρ に対して

$$\varphi(a) = \text{Tr}(\rho a), \quad a \in M(n, \mathbb{C}),$$

で定義される φ は $M(n, \mathbb{C})$ 上の状態になる。逆に、 $M(n, \mathbb{C})$ 上のすべて状態はこの形であり、状態と密度行列は1対1対応する。

例 1.4 $M(n, \mathbb{C})$ は n 次元ヒルベルト空間 \mathbb{C}^n に行列の積で作用する。 \mathbb{C}^n の内積は

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k \eta_k, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix},$$

によって定義する。単位ベクトル $\xi \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$\varphi(a) = \langle \xi, a\xi \rangle, \quad a \in M(n, \mathbb{C}),$$

は $M(n, \mathbb{C})$ 上の状態になる。これを Ω に付随するベクトル状態という。

問 1.5 $M(n, \mathbb{C})$ 上のベクトル状態は階数 1 の密度行列によって表現される. それらの対応を調べよ.

例 1.3–1.4 は, ヒルベルト空間上の有界作用素に対しても同様に述べることができる.

例 1.6 ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の有界線形作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $*$ -代数 (C^* -代数) になる. 密度作用素 ρ によって定義される $\varphi(a) = \text{Tr}(\rho a)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の状態になる. (\mathcal{H} が無限次元のときは, この形で表現される状態は正規状態と呼ばれるクラスをなす.) 単位ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ は $\varphi(a) = \langle \xi, a\xi \rangle$ によって, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の状態を定める. これをベクトル状態という. ベクトル状態は階数 1 の密度作用素によって与えられる.

例 1.7 (Ω, \mathcal{F}, P) を古典確率空間とする.

$$L^{\infty-}(\Omega) = \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$$

はすべての次数のモーメントが有限になる \mathbb{C} -値確率変数の全体である. 明らかに, $L^{\infty-}(\Omega)$ は積で閉じており, 可換な $*$ -代数になる. 確率変数 X の平均値

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mu_X(dx)$$

は $L^{\infty-}(\Omega)$ 上の状態になる. したがって, $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbf{E})$ は代数的確率空間になる. これを古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) に対応する代数的確率空間と呼ぶ. 多くの問題では, 確率空間そのものより確率変数およびその分布が重要である. その意味で, 代数的確率空間 $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbf{E})$ には古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) のもつ (確率論的に本質的な) 情報がすべて移っている.

注意 1.8 古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) の有界な確率変数の全体 $L^{\infty}(\Omega)$ は $L^{\infty-}(\Omega)$ の $*$ -部分代数であるから, $(L^{\infty}(\Omega), \mathbf{E})$ もまた代数的確率空間である. これも (Ω, \mathcal{F}, P) の (確率論的に本質的な) 情報をすべて保ち, しかも, $L^{\infty}(\Omega)$ は可換なフォンノイマン環になるなど有用な性質をもつ. しかしながら, ガウス型確率変数やブラウン運動などの重要な確率変数は非有界であるから, $L^{\infty}(\Omega)$ には属さず, $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbf{E})$ を扱う必要がある.

注意 1.9 例 1.7 では古典確率空間に代数的確率空間を対応させたが, 得られた代数的確率空間は可換な $*$ -代数に状態を合わせたものになっている. 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) は, \mathcal{A} が可換なとき古典的と呼ばれることがある. 実際, \mathcal{A} が可換な C^* -代数であれば, コンパクト・ハウスドルフ空間 X とその上のボレル確率測度 μ が存在し,

$$\varphi(a) = \int_X \hat{a}(x)\mu(dx), \quad a \in \mathcal{A},$$

が成り立つ. ここで $a \mapsto \hat{a}$ は \mathcal{A} から連続関数環 $C(X)$ の上への同型 (ゲルファント写像) である. 特に, 2つの代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) , $(C(X), \mu)$ は同型である (これをゲルファントの表現定理という).

1.2 代数的確率変数

定義 1.10 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) が与えられたとき, 各 $a \in \mathcal{A}$ を代数的確率変数, または単に確率変数と呼ぶ. 特に $a = a^*$ をみたすときには実確率変数という.

確率変数 $a \in \mathcal{A}$ に対して,

$$\varphi(a^{\epsilon_1} a^{\epsilon_2} \cdots a^{\epsilon_m}), \quad \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\},$$

の形の量を a の混合モーメントと総称する. 代数的確率変数の統計的性質は混合モーメントで与えられる. 実確率変数に対してはモーメント列

$$\varphi(a^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が確率変数を特徴づける. ($m = 0$ のときは $a^0 = 1_{\mathcal{A}}$ とする.)

定義 1.11 2つの代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi), (\mathcal{B}, \psi)$ の確率変数 a, b は, その混合モーメントがすべて一致するときに確率同値であるという.

補題 1.12 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の実確率変数 a に対して,

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

をみたす \mathbb{R} 上のボレル確率測度 μ が存在する. これを a の φ における分布ということもある.

証明 [19, 68]などを参照. $\{\varphi(a^m); m = 0, 1, 2, \dots\}$ からつくられるハンケル行列式の正値性とハンブルガーの定理による (5.1 節で少し触れる). ■

注意 1.13 補題 1.12 の分布 μ の一意性は難しい問題 (モーメント問題) である. 簡単な十分条件としてカルレマン条件がよく知られている. すなわち, モーメント列 $\{M_m\}$ が

$$\sum_{m=0}^{\infty} M_{2m}^{-\frac{1}{2m}} = +\infty$$

を満たせば,

$$M_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

を満たす確率分布 (ボレル確率測度) μ は一意に定まる [68]. たとえば, コンパクト台をもつ確率分布, ガウス分布やポアソン分布に対しては一意性が成り立つ.

例 1.14 $\mathcal{A} = M(2, \mathbb{C})$ とする.

$$\varphi(b) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} b = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}), \quad a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと, (\mathcal{A}, φ) は代数的確率空間になる. 特に,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は実確率変数 ($a = a^*$) であり, そのモーメント列は,

$$\varphi(a^m) = \begin{cases} 1, & m \text{ が偶数のとき,} \\ 0, & m \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

で与えられる. 明らかに,

$$\varphi(a^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 1, 2, \dots$$

したがって, a の分布は, ベルヌイ分布 $(\delta_{-1} + \delta_{+1})/2$ である. この意味で, a は (ふつうの) コイン投げの「確率モデル」を与えている.

定義 1.15 古典確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) で定義された確率変数 X に対して,

$$\varphi(a^m) = \mathbf{E}(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_X(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

を満たす代数的確率変数 a (と代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ)) を X の代数的実現と呼ぶ.

問 1.16 $\mathcal{A} = M(2, \mathbb{C})$ に

$$\psi(b) = \langle e_0, be_0 \rangle, \quad e_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

で定義されるベクトル状態を合わせた代数的確率空間を (\mathcal{A}, ψ) とする. これは, 例 1.14 で述べた (\mathcal{A}, φ) とは異なる. しかしながら,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

の生成する $*$ -部分代数を \mathcal{B} とすれば, $(\mathcal{B}, \varphi|_{\mathcal{B}})$ と $(\mathcal{B}, \psi|_{\mathcal{B}})$ は一致する.

問 1.17 $P(X = 1) = p, P(X = -1) = 1 - p$ ($0 \leq p \leq 1$) を満たす確率変数 X の代数的実現を 1 つ構成せよ.

古典確率変数の代数的実現の作り方は多様である。ここで、古典確率変数を代数的確率変数とみなす標準的は方法を説明しておく。実確率変数 $X \in L^\infty(\Omega)$ に対してヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ に働く掛け算作用素 M_X を

$$(M_X\xi)(\omega) = X(\omega)\xi(\omega), \quad \xi \in L^2(\Omega),$$

で定義する (一般には、定義域を制限する必要がある)。 M_X は有界とは限らない自己共役作用素になる。 Ω 上で定数 1 をとる関数 $1 \in L^2(\Omega)$ はベクトル状態 φ_0 を定義する。このとき、

$$\mathbf{E}(X^m) = \int_{\Omega} X^m(\omega) P(d\omega) = \langle 1, M_X^m 1 \rangle = \varphi_0(M_X^m), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つ。つまり、 X と M_X は確率同値であり、 M_X は X の代数的実現ということになる。

注意 1.18 ヒルベルト空間上の自己共役作用素 A は、そのスペクトル表示を考えれば、掛け算作用素によって表現される。したがって、1つの自己共役作用素とある状態を考え合わせることに、実確率変数を1つ考えることは同じことである。古典確率変数を量子確率論の枠組みに取り入れることで、古典確率論では見えにくい非可換構造を用いた解析が可能になる (典型的には量子分解)。同様のアイデアで、自己共役作用素を量子確率論の手法で解析することができる (たとえば、グラフのスペクトル解析)。

1.3 相互作用フォック確率空間

定義 1.19 実数の無限列 $\{\omega_n; n = 1, 2, \dots\}$ で、次の条件 (i) または (ii) を満たすものをヤコビ数列と呼ぶ。

- (i) [無限型] すべての $n \geq 1$ に対して $\omega_n > 0$.
- (ii) [有限型] ある番号 $m_0 \geq 1$ があって、 $\omega_1 > 0, \dots, \omega_{m_0-1} > 0, \omega_{m_0} = \omega_{m_0+1} = \dots = 0$.

有限型の場合は、 m_0 番以降をカットして正数の有限列 (項数が0のものも含む) として扱うこともある。

ヤコビ数列 $\{\omega_n\}$ が与えられたとき、それが無限型か有限型かに応じて、正規直交基底 $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty, \{\Phi_n\}_{n=0}^{m_0-1}$ をもつヒルベルト空間 $\Gamma(\mathbb{C})$ を考える。しばしば、 Φ_0 は真空ベクトルと呼ばれる。

次に、 $\Gamma(\mathbb{C})$ 上の線型作用素 B^\pm を

$$\begin{cases} B^+\Phi_n = \sqrt{\omega_{n+1}}\Phi_{n+1}, & n = 0, 1, \dots, \\ B^-\Phi_0 = 0, \quad B^-\Phi_n = \sqrt{\omega_n}\Phi_{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.2)$$

によって定義する. ただし, 有限型の場合は, $B^+\Phi_{m_0-1} = 0$ とおく. B^\pm の定義域として $\{\Phi_n\}$ の張る線型部分空間をとる. このとき,

$$\langle \Phi_m, B^\pm \Phi_n \rangle = \langle B^\mp \Phi_m, \Phi_n \rangle, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立ち, この意味で B^\pm は互いに共役になる.

定義 1.20 $\{\omega_n\}$ をヤコビ数列とする. 上の述べたように, ヒルベルト空間 $\Gamma(\mathbb{C})$ と作用素 B^\pm を定義し, それらを組にした $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を $\{\omega_n\}$ に付随する相互作用フォック空間と呼ぶ. また, B^- を消滅作用素, B^+ を生成作用素と呼ぶ.

定義 1.21 相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ に対して, B^\pm で生成される $*$ -代数を相互作用フォック代数という. 相互作用フォック代数に真空状態 (真空ベクトル Φ_0 の定めるベクトル状態) を合わせたものを相互作用フォック確率空間と呼ぶ.

例 1.22 基本的な例は以下のとおりである.

フォック空間	ヤコビ数列	交換関係	$B^+ + B^-$ の分布
ボゾン	$\omega_n = n$	$B^-B^+ - B^+B^- = 1$	ガウス分布
フェルミオン	$\omega_1 = 1, \omega_2 = \dots = 0$	$B^-B^+ + B^+B^- = 1$	ベルヌイ分布
自由	$\omega_n \equiv 1$	$B^-B^+ = 1$	半円則
q -	$\omega_n = [n]_q$	$B^-B^+ - qB^+B^- = 1$	q -変形ガウス分布

ただし, q -フォック空間では $-1 \leq q \leq 1$ であり, $[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ は q -整数である.

相互作用フォック空間の個数作用素 N が

$$N\Phi_n = n\Phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

によって定義される. 一般に, 数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 対角型作用素 α_{N+1} を

$$\alpha_{N+1}\Phi_n = \alpha_{n+1}\Phi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

によって定義する. 問題 (たとえば, 隣接作用素の量子分解) によっては, B^\pm に加えて α_{N+1} によって生成される $*$ -代数を考える. これを $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ に付随する相互作用フォック代数という. 特に興味のある確率変数は,

$$B^+ + B^-, \quad (B^+ + \sqrt{\lambda})(B^- + \sqrt{\lambda}) \quad B^+ + B^- + \alpha_{N+1}$$

などである.

2 独立性と量子中心極限定理

2.1 独立性の諸定義

2つの古典確率変数 X, Y が独立であれば, 平均値の乗法性によって,

$$\mathbf{E}(XYXXYXY) = \mathbf{E}(X^4Y^3) = \mathbf{E}(X^4)\mathbf{E}(Y^3)$$

が成り立つ. 一般に, $\mathbf{E}(XYXXYXY)$ のような量も混合モーメント (あるいは相関関数) と呼ばれる. 独立性は混合モーメントの計算ルールを与えているといえる. 代数的確率空間では, 確率変数の非可換性を反映した計算ルールがいろいろと考えられる. 以下に述べる4つの独立性は特に基本的であると思われるが, それ以外にもさまざまな「独立性」が議論されている [3, 4, 14, 47, 48, 49, 77, 78, 79].

さて, (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間とする. 独立性は, 確率変数の族というよりはむしろそれらが生成する $*$ -部分代数の族に対して定義しておいた方が便利である. (2つの古典確率変数 X, Y が独立であれば, それらの多項式 $p(X), q(Y)$ も独立になることを思い出そう.) そこで, \mathcal{A} の $*$ -部分代数の族 $\{\mathcal{A}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ の独立性を n 個の元

$$a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}, \quad a_i \notin \mathbb{C}1, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n, \quad n \geq 2, \quad (2.1)$$

に対する混合モーメント $\varphi(a_1 \cdots a_n)$ の計算ルールとして定義する. ただし, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ は隣り合う λ_i と λ_{i+1} が異なることを意味する.

定義 2.1 (可換独立) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が可換独立 (またはテンソル独立) であるとは, $\lambda_1 = \lambda_r$ となる $r \in \{2, \dots, n\}$ が存在しなければ,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

そのような r が存在するときは, そのうちで番号が最小のものをあらためて r として,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_2 \cdots a_{r-1}(a_1 a_r)a_{r+1} \cdots a_n).$$

定義 2.2 (自由独立) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が自由独立であるとは, (2.1) に加えて, $\varphi(a_2) = \dots = \varphi(a_n) = 0$ であれば,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

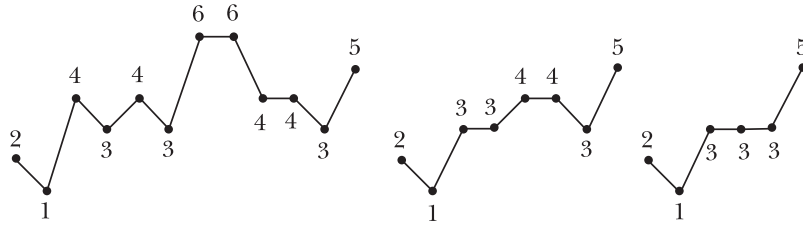
定義 2.3 (ブール独立) $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ がブール (Boole) 独立であるとは,

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_1)\varphi(a_2 \cdots a_n).$$

定義 2.4 (単調独立) 添字の集合 Λ に全順序 $<$ が与えられているものとする. $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が単調独立であるとは, $\lambda_{i-1} < \lambda_i$ かつ $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ が成り立つような $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ があれば ($i = 1$ または $i = n$ に対しては条件の一方を落とす),

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \varphi(a_i)\varphi(a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_n).$$

ただし, \check{a}_i はその項が取り除かれていることを示す. たとえば,



$$\begin{aligned}
\varphi(214343664435) &= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(21334435) \\
&= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(44)\varphi(213335) \\
&= \dots \\
&= \varphi(4)\varphi(4)\varphi(66)\varphi(44)\varphi(2)\varphi(5)\varphi(333)\varphi(1)
\end{aligned}$$

注意 2.5 ブール独立と単調独立の定義においては, $*$ -部分代数 \mathcal{A}_λ が \mathcal{A} の単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を含むことを仮定しない. $1_{\mathcal{A}}$ を含む $*$ -部分代数 \mathcal{A}_λ に対してその定義を適用すると, 自明な状況になる (次の問).

問 2.6 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の2つの $*$ -部分代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を考え, $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}_1$ を仮定する (\mathcal{A}_2 についてはどちらでもよい). $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ がブール独立または単調独立であれば,

$$\varphi(a_2^* a_2) = \varphi(a_2 a_2^*) = |\varphi(a_2)|^2, \quad a_2 \in \mathcal{A}_2,$$

が成り立つことを示せ.

問 2.7 (\mathcal{A}, φ) を代数的確率空間とする. $a \in \mathcal{A}$ が $\varphi(a^* a) = \varphi(a a^*) = |\varphi(a)|^2$ を満たせば, a と $\varphi(a)1_{\mathcal{A}}$ が確率同値になることを示せ.

独立性の定義と明らかな等式

$$a_1 \cdots a_n = a_1 \cdots (a_i - \varphi(a_i)) \cdots a_n + \varphi(a_i) a_1 \cdots \check{a}_i \cdots a_n$$

を組み合わせれば, 一般の $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ と $a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i}$ に対しても $\varphi(a_1 \cdots a_n)$ を低次のモーメントで表示する公式が導かれる. 例を示そう. $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ が上の4つの意味で独立であるとき, $a \in \mathcal{A}_1, b \in \mathcal{A}_2$ に対して, $\varphi(aba)$ などの計算公式は以下ようになる. (単調独立に必要な添字の順序は $1 < 2$ とする.)

	可換独立	自由独立	Boole 独立	単調独立
$\varphi(aba)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$	$\varphi(a)^2\varphi(b)$	$\varphi(a^2)\varphi(b)$
$\varphi(bab)$	$\varphi(a)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)\varphi(b)^2$	$\varphi(a)\varphi(b)^2$
$\varphi(abab)$	$\varphi(a^2)\varphi(b^2)$	$\varphi(a)^2\varphi(b^2)$ $+\varphi(a^2)\varphi(b)^2$ $-\varphi(a)^2\varphi(b)^2$	$\varphi(a)^2\varphi(b)^2$	$\varphi(a^2)\varphi(b)^2$

例 2.8 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots$ をヒルベルト空間とする. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ の単位元を 1_n とおく. \mathcal{A}_n を

$$1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{n-1} \otimes S_n \otimes 1_{n+1} \otimes \cdots \otimes 1_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. また, φ_n を $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ 上の状態とする. このとき, $\{\mathcal{A}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_N)$ において可換独立である.

例 2.9 例 2.8 と同じ記号を用いる. 各ヒルベルト空間 \mathcal{H}_n から単位ベクトル Ω_n が 1 つずつ選ばれているものとし, それらが張る 1 次元部分空間への射影を P_n とする. \mathcal{A}_n を

$$P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1} \otimes S_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. このとき, $\{\mathcal{A}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \Omega_1 \otimes \cdots \otimes \Omega_N)$ においてブール独立である.

例 2.10 例 2.8 と同じ記号を用いる. \mathcal{M}_n を

$$1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{n-1} \otimes S_n \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N, \quad S_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n),$$

の形の作用素が生成する $*$ -代数とする. このとき, $\{\mathcal{M}_n\}$ は代数的確率空間 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N), \psi \otimes \Omega_2 \otimes \cdots \otimes \Omega_N)$ において単調独立である. ここで ψ は $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ の任意の状態である.

例 2.11 ヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の自由フォック空間が

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

によって定義される. ここで $\mathbb{C}\Omega$ は単位ベクトル Ω の張る 1 次元空間である. 各 $h \in \mathcal{H}$ に対して $l(h) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ を

$$l(h)\Omega = 0, \quad l(h)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \langle h, f_1 \rangle f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$$

によって定義する. その共役作用素は

$$l^*(h)\Omega = h, \quad l^*(h)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = h \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

で特徴付けられる. $\{e_n\}$ を \mathcal{H} の正規直交系として, $\{l(e_n), l^*(e_n)\}$ の生成する $*$ -部分代数を \mathcal{A}_n とおくと, $\{\mathcal{A}_n\}$ は真空状態 Ω において自由独立になる.

例 2.12 離散群 G が部分群 G_i の直積であれば, G_i の生成する群環 \mathcal{A}_i は単位元 $e \in G$ に対応する状態に関して可換独立である.

例 2.13 離散群 G が部分群 G_i の自由積であれば, G_i の生成する群環 \mathcal{A}_i は単位元 $e \in G$ に対応する状態に関して自由独立である.

2.2 コメント: 合成積

代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の2つの実確率変数 a_1, a_2 に対して, $a = a_1 + a_2$ の分布 μ がどうなるかに興味がある. 各 i に対して, \mathcal{A}_i を a_i の生成する $*$ -代数, μ_i を a_i の分布とする. $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ が可換独立, 自由独立, Boole 独立, 単調独立にしたがって, μ を μ_1, μ_2 の可換合成積, 自由合成積, Boole 合成積, 単調合成積という. 合成積は分布のキュミュラントに関して線型になるため, それぞれの独立性に応じてモーメント列をキュミュラント列に変換する公式が重要になる. その議論は組合せ論的な側面からも興味深い. 可換合成積は, 通常の実確率測度の合成積に一致する. 自由合成積については [30, 72], Boole 合成積については [15, 70], 単調合成積については [54] を参照されたい. また, Boole 合成積に近いものとして Fermion 合成積がある [63].

2.3 シングルトン条件

確率変数列の極限挙動は確率論における基本的な問題である. まず, 確率変数列の収束は次のように定義される.

定義 2.14 確率変数 a_n の属する代数的確率空間を $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)$ とし, 別の代数的確率空間 (\mathcal{B}, ψ) と $b \in \mathcal{B}$ があって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(a_n^{\epsilon_1} a_n^{\epsilon_2} \cdots a_n^{\epsilon_m}) = \psi(b^{\epsilon_1} b^{\epsilon_2} \cdots b^{\epsilon_m})$$

がすべての組合せ $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$, $m = 1, 2, \dots$, に対して成り立つとき, b を $\{a_n\}$ のモーメント極限または単に確率極限という. このとき, $\{a_n\}$ は b にモーメント収束または確率収束するという.

代数的確率変数 a_1, a_2, \dots, b が実確率変数であれば, それらの分布 μ_1, μ_2, \dots, μ が定義される. このとき, $\{a_n\}$ が b に確率収束するための必要十分条件は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つことである. もし, μ がモーメント問題の一意解であれば, モーメント収束から確率測度の弱収束が従う. つまり, 任意の有界連続関数 $f(x)$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mu_n(dx) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mu(dx).$$

$\{a_n\}$ を代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の確率変数列とする. 特に, $\alpha > 0$ を定数として定義されるスケール和

$$\frac{S_N}{N^\alpha} = \frac{1}{N^\alpha} \sum_{n=1}^N a_n \quad (2.2)$$

の $N \rightarrow \infty$ の挙動が興味深い. そのためには, (2.2) の混合モーメント

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{\alpha m}} \varphi(S_N^{\epsilon_1} \cdots S_N^{\epsilon_m}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{\alpha m}} \sum_{n \in \mathfrak{M}(m, N)} \varphi(a_{n_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{n_m}^{\epsilon_m}) \quad (2.3)$$

を調べる必要がある. ここに $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}$ であり, $\mathfrak{M}(m, N)$ は $\{1, \dots, m\}$ から $\{1, \dots, N\}$ への写像の全体である.

まず, 前節で定義した4つの独立性がもつ共通の性質を定式化しよう. 集合 Λ の元からなる有限列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ において, ただ1回のみ現れている λ_s をシングルトンと呼ぶことにする.

定義 2.15 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の $*$ -部分代数の族 $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ がシングルトン条件を満たすとは, 任意の有限列 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ において λ_s がシングルトンであれば,

$$\varphi(a_1 \cdots a_s \cdots a_n) = \varphi(a_s) \varphi(a_1 \cdots \check{a}_s \cdots a_n), \quad a_i \in \mathcal{A}_{\lambda_i},$$

が成り立つときにいう. ただし, \check{a}_s はその項が取り除かれていることを示す.

命題 2.16 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の $*$ -部分代数の族 $\{\mathcal{A}_\lambda\}$ が可換独立, 自由独立, Boole 独立, または単調独立であれば, シングルトン条件を満たす.

(2.3) の右辺において, 組合せの個数を評価することで次の結果が得られる.

命題 2.17 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の確率変数列 $\{a_n\}$ が次の3条件を満たすとする:

(i) $\varphi(a_n) = \varphi(a_n^*) = 0$.

(ii) $\{a_n\}$ は一様有界な混合モーメントをもつ. つまり, 各 $m \geq 1$ に対して,

$$\sup \left\{ \left| \varphi(a_{n_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{n_m}^{\epsilon_m}) \right|; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{1, *\}, n_1, \dots, n_m \geq 1 \right\} < \infty. \quad (2.4)$$

(iii) a_n の生成する $*$ -代数を \mathcal{A}_n とするとき, $\{\mathcal{A}_n\}$ はシングルトン条件を満たす.

このとき, $\alpha > 1/2$ であれば, すべての $m = 1, 2, \dots$ に対して (2.3) は 0 になる. また, $\alpha = 1/2$ であれば, m が奇数のときは, (2.3) はやはり 0 である. 偶数のときは, m を $2m$ と書きあらためて,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} \varphi(S_N^{\epsilon_1} \cdots S_N^{\epsilon_{2m}}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} \sum_{n \in \mathfrak{M}_P(2m, N)} \varphi(a_{n_1}^{\epsilon_1} \cdots a_{n_{2m}}^{\epsilon_{2m}}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

ただし, $\mathfrak{M}_P(2m, N)$ は写像 $n \in \mathfrak{M}(2m, N)$ で, すべての i に対して $n^{-1}(i)$ は空または2点から成るようなものの全体である.

注意 2.18 確率変数列 $\{a_n\}$ がヒルベルト空間上の作用素ならば, ベクトル状態において一様有界な混合モーメントをもつためには $\sup_n \|a_n\| < \infty$ が十分条件になる. また, $\{a_n\}$ が C^* -確率空間 (\mathcal{A}, φ) の確率変数列なら, 同様の条件の下でそれらは一様有界な混合モーメントをもつ.

命題 2.17 の仮定の下で, $\alpha < 1/2$ に対するスケーリング和 (2.2) は一般には発散する。したがって, 興味深いのは $\alpha = 1/2$ のときだけであり, ちょうど中心極限定理の形式になる。命題 2.17 を実確率変数の場合書き直しておこう。

定理 2.19 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の実確率変数列 $\{a_n\}$ が命題 2.17 の 3 条件を満たせば, $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^{2m+1} \right] &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^{2m} \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} \sum_{n \in \mathfrak{M}_{\mathbb{P}}(2m, N)} \varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_{2m}}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4 量子中心極限定理

定理 2.19 で仮定されているシングルトン条件を, 第 2.1 節で定義した 4 つの独立性に置き換えることで中心極限定理が得られる。

定理 2.20 (量子中心極限定理) 代数的確率空間 (\mathcal{A}, φ) の確率変数列 $\{a_n\}$ が次の 3 条件を満たしているものとする。

- (i) a_n は実確率変数である。つまり $a_n = a_n^*$ 。
- (ii) a_n は正規化されている。つまり $\varphi(a_n) = 0$ かつ $\varphi(a_n^2) = 1$ 。
- (iii) $\{a_n\}$ は一様有界な混合モーメントをもつ。

さらに, a_n の生成する * 部分代数を \mathcal{A}_n とするとき, それらが (1) 可換独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx,$$

(2) 自由独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4-x^2} dx,$$

(3) ブール独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx),$$

(4) 単調独立であれば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N a_n \right)^m \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}} dx,$$

がすべての $m = 0, 1, 2, \dots$ で成り立つ。ここで現れた極限分布は, (1) ガウス分布, (2) 半円則, (3) ベルヌイ分布, (4) 逆正弦則。

証明 (2.6) をそれぞれの独立性にしたがって計算すればよい. まず, 可換独立の場合は, すべての $n \in \mathfrak{M}_P(2m, N)$ に対して, $\varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_{2m}}) = \varphi(a_{i_1}^2) \cdots \varphi(a_{i_m}^2) = 1$ となるから,

$$(2.6) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} |\mathfrak{M}_P(2m, N)| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} \binom{N}{m} \frac{(2m)!}{2^m} = \frac{(2m)!}{2^m m!}.$$

これは標準ガウス分布の $2m$ 次モーメントに一致する.

自由独立であるときは, $n \in \mathfrak{M}_P(2m, N)$ に対して,

$$\varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_{2m}}) = \begin{cases} 1, & n \text{ が定める } \{1, 2, \dots, 2m\} \text{ の分割が非交差対分割のとき,} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

となるから,

$$(2.6) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^m} \binom{N}{m} m! |\mathcal{P}_{\text{NCP}}(2m)| = |\mathcal{P}_{\text{NCP}}(2m)| = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!}.$$

これはカタラン (Catalan) 数であり, 半円則の $2m$ 次モーメントに一致する.

ブール独立であるときは, $n \in \mathfrak{M}_P(2m, N)$ に対して,

$$\varphi(a_{n_1} \cdots a_{n_{2m}}) = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2, \dots, n_{2m-1} = n_{2m} \text{ のとき,} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

となるから,

$$(2.6) = \lim_{N \rightarrow \infty} N^{-m} \binom{N}{m} m! = 1.$$

これはベルヌイ分布の $2m$ 次モーメントである.

最後に, 単調独立の場合であるが, これについても組み合わせ数の問題に帰着することができて

$$(2.6) = \frac{(2m)!}{2^m m! m!} = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^{2m}}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

が得られる [64]. あるいは, 母関数を用いて計算してもよい [6, 第 10 章]. ■

2.5 独立性をめぐる研究の流れ

可換独立性は測度論的確率論の独立性を抽象化したものであるが, \mathcal{A} そのものの可換性は仮定されていない. このような代数的定式化は, 1970 年代の Cockroft–Hudson [21], Cushen–Hudson [22], Giri–von Waldenfels [24] に始まった. シングルトン条件も 1970 年代の von Waldenfels の議論に遡る. 自由独立性は 1980 年代に Voiculescu によって定式化され, 自由確率論と呼ばれる大きな分野に発展していることは周知であろう [29, 30, 72]. Boole 独立性は, Bożejko [11] の正則自由積に遡るが, 合成積や組合せ論との関連が Speicher–Woroudi [70] によって研究された. 単調独立性は, Lu [51] と Muraki [53] によって同じ頃に

異なった文脈で発見された。その後, Muraki [54, 55] によって深く研究されている。これらの独立性を公理的に統一する研究が Franz [23], Muraki [56], Schürmann [67], Speicher [69] にある。これ以外にもさまざまな「独立性」が議論されている。たとえば, Lenczewski [47] は q -変形を議論し, Bożejko–Speicher [14] は自由独立性を拡張し, Accardi–Hashimoto–Obata [4] はシングルトン条件を不等式を用いて発展させた。最近, Lenczewski [48, 49] は独立性を階層的に定義して分類している。また, ブール独立性と単調独立性の組み合わせが Wysoczański [77, 78, 79] によって研究されている。

3 グラフのスペクトル解析

3.1 グラフと隣接行列

定義 3.1 空でない集合 V とその 2 点集合の部分集合 E , つまり, $E \subset \{\{x, y\}; x, y \in V, x \neq y\}$ の組 $G = (V, E)$ をグラフという。 V の元を頂点, E の元を辺という。 2 頂点 $x, y \in V$ が $\{x, y\} \in E$ を満たすとき, それらは隣接しているといい, $x \sim y$ で表す。

グラフとは, 考えている対象の隣接関係を抽象化して得られる概念であるが, もちろん幾何学的な図形としてとらえるのが自然である。グラフ $G = (V, E)$ に対して, 頂点を平面上の点として配置し, 隣接関係にある 2 頂点を線 (線分または弧) で結んでできる図形をグラフ G の幾何学的実現という。幾何学的実現は見掛け上多様である。たとえば,

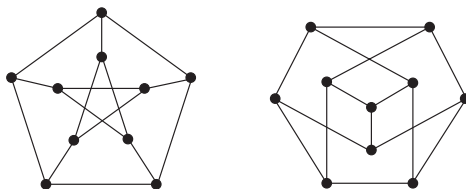


図 1: Petersen グラフの幾何学的実現

定義 3.2 グラフ $G = (V, E)$ は, V が有限 ($|V| < \infty$) のとき有限グラフ, そうでないとき無限グラフと呼ばれる。

定義 3.3 グラフ G の頂点 $x \in V$ に対して,

$$\deg(x) = \deg_G(x) = |\{y \in V; y \sim x\}|$$

を頂点 x の次数という。

定義 3.4 グラフ $G = (V, E)$ において, すべての頂点の次数が一定値 κ であるとき, そのグラフを κ -正則という。次数を明示する必要がなければ, 単に正則であるという。

定義 3.5 頂点の有限列 $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$ で

$$x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_n \quad (3.1)$$

をみたすものを長さ n の歩道 (ウォーク) という. ここで, x_0, x_1, \dots, x_n の中に一致する頂点があってもかまわない. 歩道 (3.1) を構成する頂点 x_0, x_1, \dots, x_n が互いに異なるとき, それは長さ n の道と呼ばれる. 歩道 (3.1) において, $n \geq 3$ かつ x_0, x_1, \dots, x_{n-1} が互いに異なり, $x_n = x_0$ となっているとき, それを長さ n のサイクルという.

道には通常は向きを考えないので, (3.1) が道であれば,

$$x_n \sim x_{n-1} \sim \dots \sim x_0$$

も道であり, それらを区別しない. サイクルに対しては, 向きを考慮しないと共に, 始点も考えない. つまり, $x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_{n-1} \sim x_0$ がサイクルならば, $x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_{n-1} \sim x_0 \sim x_1$ も同じサイクルを表す.

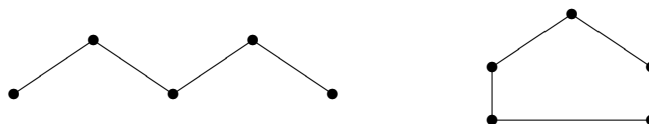


図 2: P_5 : 長さ 4 の道 (左). C_5 : 長さ 5 のサイクル (右)

定義 3.6 グラフ $G = (V, E)$ が連結であるとは, 任意の異なる 2 頂点 $x, y \in V$ ($x \neq y$) を結ぶウォークが存在するときという. (ウォークを道と言い換えても同じことである.)

定義 3.7 2 つのグラフ $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ が同型であるとは, 全単射 $f: V \rightarrow V'$ で

$$x \sim y \iff f(x) \sim f(y)$$

を満たすものが存在するときという. このとき, $G \cong G'$ と書く.

定義 3.8 頂点集合 V を添字集合とする行列 $A = (A_{xy})$ を

$$A_{xy} = \begin{cases} 1, & x \sim y, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

で定義する. これをグラフ $G = (V, E)$ の隣接行列という.

隣接行列はグラフの代数的表現として基本的である. 実際, 隣接行列はグラフを (同型を除いて) 再現する.

問 3.9 同型なグラフの隣接行列にはどのような関係があるか.

隣接行列 A の生成する $*$ -代数を扱うことで多くの結果が導かれる。有限グラフ、無限グラフの両方を扱うが、無限グラフのときは局所有限性 (すべての $x \in V$ に対して $\deg(x) < \infty$ となること) を仮定する。これによって、隣接行列のべき乗 A^m が定義され、 A の複素係数多項式の全体 $\mathcal{A}(G)$ が通常の行列演算で可換な $*$ -代数となる。これをグラフ G の隣接代数といい $\mathcal{A}(G)$ で表す。

局所有限性によって、隣接行列のべき乗 A^m が定義されることを確認しておこう。実際、行列の積の定義から

$$(A^m)_{xy} = \sum_{x_1, \dots, x_{m-1} \in V} A_{xx_1} A_{x_1 x_2} \cdots A_{x_{m-1} y} \quad (3.2)$$

であるが、局所有限性によって、和に現れる項は有限個を除いて $A_{xx_1} A_{x_1 x_2} \cdots A_{x_{m-1} y} = 0$ であり、 A^m の (x, y) -成分が定義される。 $A_{xx_1} A_{x_1 x_2} \cdots A_{x_{m-1} y}$ が 0 でないとすれば、 $A_{xx_1} = A_{x_1 x_2} = \cdots = A_{x_{m-1} y} = 1$ であり、それらの積は 1 となる。したがって、(3.2) の右辺の和は、 $x \sim x_1 \sim x_2 \sim \cdots \sim x_{m-1} \sim y$ をみたすような添字列、すなわち、 x と y を結ぶ長さ m の歩道の個数に一致する。こうして、次の基本的な結果が得られた。

命題 3.10 $m = 0, 1, 2, \dots$ と $x, y \in V$ に対して、

$$(A^m)_{xy} = |\{x \text{ と } y \text{ を結ぶ長さ } m \text{ の歩道}\}|.$$

一方、 A はヒルベルト空間 $\ell^2(V)$ に自然な仕方で作用する。各 $x \in V$ に対して、1 点集合 $\{x\}$ の定義関数を δ_x で表す。このとき、 $\{\delta_x; x \in V\}$ は $\ell^2(V)$ の正規直交基底となる。それらの張る線形空間を $C_0(V)$ とする。 A は $C_0(V)$ 上の線形作用素になる。このとき、

$$A\delta_x = \sum_{y \sim x} \delta_y, \quad x \in V,$$

が成り立ち、特に、

$$A_{xy} = \langle \delta_x, A\delta_y \rangle$$

となる。

問 3.11 グラフ $G = (V, E)$ の隣接行列 A が $\ell^2(V)$ 上の有界線形作用素になるための必要十分条件は $\sup\{\deg x; x \in V\} < \infty$ である。

3.2 グラフに付随する代数的確率空間

隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ に状態 φ を考え合わせることで、隣接行列 A を確率変数として取り扱うことができる。 A の状態 φ における分布をグラフの φ におけるスペクトル分布という。次の 3 つの状態に興味がある。

(a) トレース $G = (V, E)$ を有限グラフとする。正規化されたトレース

$$\varphi_{\text{tr}}(a) = \frac{1}{|V|} \text{Tr } a, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

は、隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ 上の状態になる。隣接行列 A の φ_{tr} における分布は、グラフのスペクトル分布 (隣接行列 A の固有値分布) に一致する (問 3.12)。

(b) 真空状態 ヒルベルト空間 $\ell^2(V)$ の標準的な基底を $\{\delta_x; x \in V\}$ とする。頂点 $o \in V$ に付随するベクトル状態が

$$\varphi_o(a) = \langle \delta_o, a\delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

で定義される。これを頂点 $o \in V$ に付随する真空状態という。 A の φ_o における分布を μ とすれば、

$$\langle \delta_o, A^m \delta_o \rangle = \varphi_o(A^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots,$$

が成り立つ。したがって、分布 μ は o を出発して m ステップで o に戻る歩道の個数の積分表示に現れる。なお、真空状態を考えると、実際上、 $o \in V$ を含む連結成分だけを問題にすることになるから、はじめからグラフは連結であるものとする。

(c) 真空状態の 1 径数変形 (連結) グラフの 2 頂点 $x, y \in V$ に対して、それらを結ぶ道のうちで最短なもの長さを $\partial(x, y)$ で表わし、 x, y の (グラフ) 距離という。もちろん、 $\partial(x, x) = 0$ とする。 $-1 \leq q \leq 1$ に対して、

$$Q = Q_q = (q^{\partial(x, y)})$$

によって定義される行列をグラフの Q -行列という。これを用いて定義される $\mathcal{A}(G)$ 上の線形関数

$$\varphi_q(a) = \langle Q_q \delta_o, a\delta_o \rangle, \quad a \in \mathcal{A}(G),$$

は、フォック空間でいうコヒーレント状態に近い性質をもつ ($Q_q \delta_o \in \ell^2(V)$ とは限らないが)。ここで、 φ_q がどのような $q \in [-1, 1]$ に対して隣接代数 $\mathcal{A}(G)$ 上の状態になるか (つまり、正値性 $\varphi_q(a^*a) \geq 0$ を満たすか) は興味ある問題である。簡単な十分条件として、

(i) Q は V 上の正 (定) 値核である;

(ii) $AQ = QA$;

がすぐわかるが、 Q が V 上の正値核になるための条件は特別な場合を除いてあまり知られていない [12, 60]。

問 3.12 $G = (V, E)$ を頂点数 n の有限グラフとする。隣接行列 A の異なる固有値を小さいものから順に並べて、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s$ とし、それらの重複度を m_1, m_2, \dots, m_s とする。このとき、確率分布

$$\mu(d\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s m_i \delta(\lambda - \lambda_i)$$

をグラフ G のスペクトル分布または固有値分布という。隣接行列 A の φ_{tr} における分布は、グラフのスペクトル分布に一致することを示せ。

4 グラフの積構造と漸近的スペクトル

4.1 グラフの直積

2つのグラフ $G_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を考える. このとき, $V = V^{(1)} \times V^{(2)}$ を頂点の集合とし, 辺集合を

$$E = \left\{ \{(x, y), (x', y')\}; \begin{array}{l} \text{(i) } x = x', y \sim y'; \text{ または,} \\ \text{(ii) } x \sim x', y = y' \end{array} \right\}$$

で定義する. こうしてできるグラフ (V, E) を G_1 と G_2 の直積といい, $G = G_1 \times G_2$ と書く.

補題 4.1 (1) $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

(2) $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$.

これによって, 2個以上のグラフの直積 $G_1 \times \cdots \times G_n$ が帰納的に定義される.

例 4.2 (整数格子) $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ (n 個の直積).

例 4.3 K_n を頂点数 n の完全グラフ (すべての頂点对に辺が引かれているグラフ) とする. $H(d, n) = K_n \times \cdots \times K_n$ (d 個の直積) がハミング・グラフである.

グラフ G_i の隣接行列を A_i とする. A_i は $C_0(V^{(i)}) \subset \ell^2(V^{(i)})$ 上の線形作用素である. 自然な対応で $C_0(V^{(1)} \times V^{(2)}) \cong C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)})$ であるから, $G = G_1 \times G_2$ の隣接行列 A を $C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)})$ 上の作用素と考えることができる.

補題 4.4 G_1, G_2, \dots, G_n をグラフとし, それらの隣接行列を A_1, A_2, \dots, A_n とする. 直積グラフ $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ の隣接行列 A は, $C_0(V^{(1)}) \otimes C_0(V^{(2)}) \otimes \cdots \otimes C_0(V^{(n)})$ 上の作用素として,

$$A = \sum_{k=1}^n 1_1 \otimes \cdots \otimes 1_{k-1} \otimes A_k \otimes 1_{k+1} \otimes \cdots \otimes 1_n \quad (4.1)$$

のような和に分解される.

例 2.8 で述べたように, (4.1) は直積型の状態に関して可換独立な確率変数の和になっている. したがって, 可換独立に関する中心極限定理を組み合わせれば, 直積グラフ $G^N = G \times \cdots \times G$ (N 個の直積) の漸近的スペクトル分布を求めることができる.

定理 4.5 $G = (V, E)$ をグラフとし, $o \in V$ を原点として固定する. その N 重直積 G^N の頂点 $o = o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態を $\langle \cdot \rangle$ とおく. G^N の隣接行列を $A^{(N)}$ とすると,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{(N)}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つ.

証明 補題 4.4 によって,

$$A^{(N)} = \sum_{k=1}^N \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{k-1} \otimes A \otimes \overbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}^{N-k} \quad (4.2)$$

となる. 真空状態は直積型の状態であるから, 例 2.8 で述べたように (4.2) は真空状態に関して可換独立な確率変数の和であり, 各項は同じ分布をもつ. その平均は

$$\langle 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \rangle = \langle A \rangle = \langle \delta_o, A\delta_o \rangle = 0$$

であり, 分散は,

$$\langle (1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes A \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle = \langle \delta_o, A^2\delta_o \rangle = \text{deg}(o).$$

したがって,

$$\frac{1}{\sqrt{\text{deg}(o)}} 1^{\otimes(k-1)} \otimes A \otimes 1^{\otimes(N-k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

が正規化された実確率変数列となる. そうすれば, 可換独立に関する中心極限定理によって,

$$\frac{A^{(N)}}{\sqrt{N \text{deg}(o)}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{\text{deg}(o)}} 1^{\otimes(k-1)} \otimes A \otimes 1^{\otimes(N-k)}$$

の分布は標準ガウス分布に近づく. ■

4.2 グラフの櫛形積

2つのグラフ 2つのグラフ $G_i = (V^{(i)}, E^{(i)})$ ($i = 1, 2$) を考え, それらの隣接行列を $A^{(i)}$ とする. また, G_2 には原点 $o \in V^{(2)}$ が定められているものとする. このとき, $V_1 \times V_2$ を頂点の集合として,

$$A_{(x,y),(x',y')} = A_{xx'}^{(1)}\delta_{yo}\delta_{y'o} + \delta_{xx'}A_{yy'}^{(2)}, \quad x, x' \in V^{(1)}, \quad y, y' \in V^{(2)}, \quad (4.3)$$

を隣接行列とする (連結な局所有限) グラフが得られる (図 3). これを G_1 と G_2 の櫛形積 (comb product) と呼び, $G_1 \triangleright_o G_2$ で表す. その隣接行列を $A^{(1)} \triangleright_o A^{(2)}$ と書く (混乱がなければ, 添字 o を省略する). 櫛形積は結合法則

$$(G_1 \triangleright_{o_2} G_2) \triangleright_{o_3} G_3 = G_1 \triangleright_{(o_2, o_3)} (G_2 \triangleright_{o_3} G_3)$$

を満たす. これを $G_1 \triangleright_{o_2} G_2 \triangleright_{o_3} G_3$ と略記する.

補題 4.6 N 個のグラフ $G_n = (V^{(n)}, E^{(n)})$ が与えられ, 各グラフには原点 $o_n \in V^{(n)}$ が定まっているものとする. このとき, 櫛形積 $G_1 \triangleright_{o_2} G_2 \triangleright_{o_3} \cdots \triangleright_{o_N} G_N$ の隣接行列は

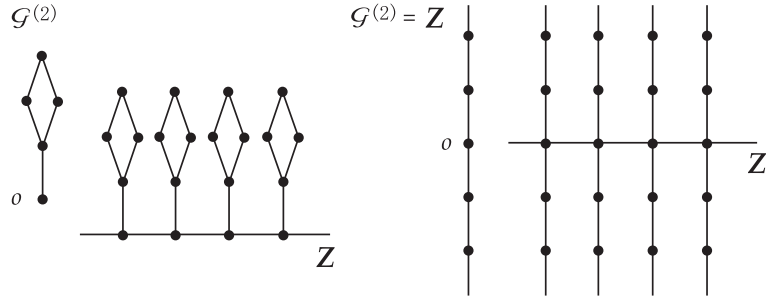


図 3: 櫛形グラフの例: $\mathbb{Z} \triangleright_o G_2$ と 2次元櫛形格子 $\mathbb{Z} \triangleright_o \mathbb{Z}$

$C_0(V^{(1)} \times \dots \times V^{(N)}) \cong C_0(V^{(1)}) \otimes \dots \otimes C_0(V^{(N)})$ 上の作用素であり, 次のように分解する:

$$A^{(1)} \triangleright A^{(2)} \triangleright \dots \triangleright A^{(N)} = \sum_{n=1}^N 1_1 \otimes \dots \otimes 1_{n-1} \otimes A^{(n)} \otimes P_{n+1} \otimes \dots \otimes P_N. \quad (4.4)$$

ここで, P_n は $\ell^2(V^{(n)})$ から δ_{o_n} で張られる 1次元空間への射影である.

証明 (4.4) は, (4.3) を用いた簡単な計算でわかる. ■

例 2.10 で見たように, (4.4) の右辺はベクトル状態 $\delta_{o_1} \otimes \dots \otimes \delta_{o_N}$ に関して単調独立な確率変数の和になっている. そうすれば, 単調独立に関する中心極限定理 (定理 2.20) を適用して次の結果が得られる.

定理 4.7 ([1]) グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているとし, その N 重櫛形積 $G^{\triangleright N}$ の隣接行列を $A^{\triangleright N}$ とする. このとき, 頂点 $o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態において,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{\triangleright N}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} \frac{x^m}{\sqrt{2-x^2}} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つ.

注意 4.8 グラフの櫛形積 (たとえば, 2次元櫛形格子) は量子物理の論文に現れている [16]. そこで論じられている「隠れたスペクトル」との関連は興味深いと思われる.

4.3 グラフの星形積

前節と同様に, 2つのグラフ G_i ($i = 1, 2$) を考える. 今度は双方の G_i に原点 $o_i \in V^{(i)}$ が定められているものとする. このとき, $V_1 \times V_2$ を添字とする行列

$$A_{(x,y),(x',y')} = A_{xx'}^{(1)} \delta_{y o_2} \delta_{y' o_2} + \delta_{x o_1} \delta_{x' o_1} A_{yy'}^{(2)}, \quad x, x' \in V^{(1)}, \quad y, y' \in V^{(2)}, \quad (4.5)$$

を考える. A は対角成分が 0, その他の成分が 0 と 1 のみからなる対称行列になる. したがって, A は (連結とは限らない) グラフの隣接行列である. このグラフの (o_1, o_2) を含む連結成分を G_1 と G_2 の星形積と呼び, $G_1 \star_{(o_1, o_2)} G_2$ で表す (図 4).

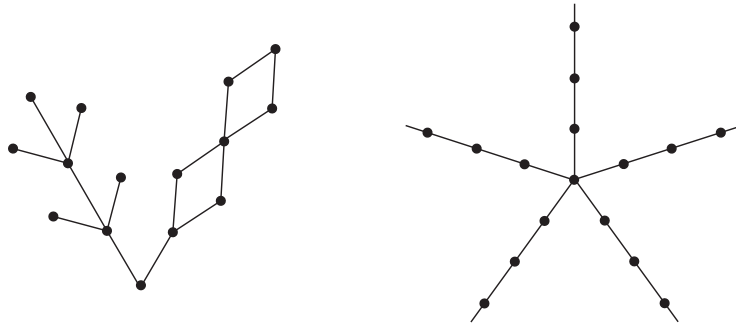


図 4: 星形グラフ (右は星形格子 Z_+^{*5})

補題 4.9 N 個のグラフ $G_n = (V^{(n)}, E^{(n)})$ が与えられ, 各グラフには原点 $o_n \in V^{(n)}$ が定まっているものとする. このとき, 星形積 $G = (V, E) = G_1 \star G_2 \star \cdots \star G_N$ の隣接行列 A は $C_0(V) \subset C_0(V^{(1)}) \otimes \cdots \otimes C_0(V^{(N)})$ 上の作用素であり, 次のように分解する:

$$A = \sum_{n=1}^N P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n-1} \otimes A^{(n)} \otimes P_{n+1} \otimes \cdots \otimes P_N. \quad (4.6)$$

ここで, P_n は $\ell^2(V^{(n)})$ から δ_{o_n} で張られる 1 次元空間への射影である.

証明 (4.6) は, (4.5) を用いた簡単な計算でわかる. ■

例 2.9 で見たように, (4.6) の右辺はベクトル状態 $\delta_{o_1} \otimes \cdots \otimes \delta_{o_N}$ に関してプール独立な確率変数の和になっている. そうすれば, プール独立に関する中心極限定理 (定理 2.20) を適用して次の結果が得られる.

定理 4.10 ([58]) グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているとし, その N 重星形積 $G^{\triangleright N}$ の隣接行列を $A^{\star N}$ とする. このとき, 頂点 $o_N = (o, \dots, o)$ における真空状態において,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left(\frac{A^{\star N}}{\sqrt{N \deg(o)}} \right)^m \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

が成り立つ.

これまでに, 隣接行列を通してグラフの積構造と独立性を結びつけて議論してきた. 概ね次のようにまとめられる (自由独立性については省略).

	可換独立	自由独立	ブール独立	単調独立
中心極限分布	ガウス分布	半円則	ベルヌイ分布	逆正弦則
グラフの例	正方格子	等質樹木	星形グラフ	楕形グラフ

5 成長する正則グラフに対する漸近的スペクトル理論

5.1 直交多項式

実数 \mathbb{R} 上のボレル確率測度で, すべての次数のモーメントが有限になるものの全体を $\mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ とおく. $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に対して

$$M_m = M_m(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx) \quad (5.1)$$

によって定義される実数列 $\{M_0 = 1, M_1, \dots\}$ を μ のモーメント列という. 以下, $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ とする. 単項式列 $1, x, x^2, x^3, \dots \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ にシュミットの直交化を施して得られる多項式列

$$P_0(x) = 1, \quad \dots \quad P_n(x) = x^n + \dots, \quad \dots$$

を μ に付随する直交多項式という.

定理 5.1 (3 項間漸化式) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に付随する直交多項式とする. μ の台が無限集合であれば, 2 つの数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\alpha_n \in \mathbb{R}, \omega_n > 0$ を満たすものがあって,

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x - \alpha_1, \\ xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{n+1}P_n(x) + \omega_n P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

さらに,

$$\|P_0\| = 1, \quad \|P_n\| = \sqrt{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n}, \quad n \geq 1,$$

が成り立つ.

証明は容易 [19, 68]. したがって, μ に付随する直交多項式 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ は, 2 つの数列 $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって完全に決定される. これら 2 つの数列を μ に (または $\{P_n\}$ に) 付随するヤコビ係数と呼ぶことにする. 明らかに,

$$\alpha_1 = M_1(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx), \quad \omega_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha_1)^2 \mu(dx).$$

つまり, α_1 と ω_1 はそれぞれ μ の平均と分散である.

注意 5.2 確率分布 μ の台が丁度 $N + 1$ 個の点からなるときに限り, 直交化の手続きが $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ の $N + 1$ 個の多項式を得た段階で終了する. そのとき, (5.2) は $P_{N+1} = 0$ として成り立ち, ヤコビ係数は 2 組の有限数列 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N+1}\}, \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ になる. 最後の番号の定数は, (5.2) において $P_{N+1} = 0$ として決定される. 以下では, 直交多項式 $\{P_n\}$ が無限列の場合に即した記述をするが, 有限列 $\{P_0, P_1, \dots, P_N\}$ に帰着している場合の変更は容易である.

例 5.3 (第 1 種チェビシェフ多項式) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ を満たす n 次多項式 $T_n(x)$ を第 1 種 Chebyshev 多項式と呼ぶ. 基準化する (最高次の係数を 1 とする) ために,

$$\tilde{T}_0(x) = 1, \quad \tilde{T}_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-2} T_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

とおくと, $\{\tilde{T}_n(x)\}$ は, (平均 0, 分散 1 となるように) 正規化された逆正弦則

$$\frac{dx}{\pi\sqrt{2-x^2}}, \quad |x| < \sqrt{2},$$

に付随する直交多項式であり, ヤコビ係数は $\{\alpha_n \equiv 0\}, \{\omega_1 = 1, \omega_2 = \omega_3 = \dots = 1/2\}$.

例 5.4 (第 2 種チェビシェフ多項式) $n = 0, 1, \dots$ に対して $\sin(n+1)\theta / \sin \theta = U_n(\cos \theta)$ で定義される n 次多項式 $U_n(x)$ を第 2 種 Chebyshev 多項式と呼ぶ. 基準化するために,

$$\tilde{U}_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

とおく. $\{\tilde{U}_n(x)\}$ は正規化された半円則

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx, \quad |x| \leq 2,$$

に付随する直交多項式であり, ヤコビ係数は $\{\alpha_n \equiv 0\}, \{\omega_n \equiv 1\}$ で与えられる.

ここで, ボレル確率測度, モーメント列, ヤコビ係数の関係を少し述べておこう. 実数列 $\{M_0 = 1, M_1, M_2, \dots\}$ に対して,

$$\Delta_m = \det \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \cdots & M_m \\ M_1 & M_2 & \cdots & M_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_m & M_{m+1} & \cdots & M_{2m} \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

をハンケル行列式という. 実数列 $\{M_0 = 1, M_1, M_2, \dots\}$ で,

(i) すべての m に対して $\Delta_m > 0$; または,

(ii) ある $m_0 \geq 1$ が存在して $\Delta_0 > 0, \dots, \Delta_{m_0-1} > 0, \Delta_{m_0} = \dots = 0$ が成り立つ;

のいずれかの条件を満たすもの全体を \mathfrak{M} で表わす. この性質が確率分布のモーメント列を特徴づける (ハンブルガーの定理).

また, 次の (i) または (ii) を満たす数列の組 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ の全体を \mathfrak{J} とする.

(i) すべての n に対して $\omega_n > 0$ であり, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ は実数の無限列である;

(ii) ある $m_0 \geq 1$ が存在して $\omega_1 > 0, \dots, \omega_{m_0-1} > 0, \omega_{m_0} = \omega_{m_0+1} = \dots = 0$ (つまり, 有限型のヤコビ数列), かつ $\{\alpha_n\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_0}\}$ が m_0 個の実数からなる有限列である.

与えられた確率分布 $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に対して, そのモーメント列 $\{M_m\}$ とヤコビ係数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ を対応させることができる. また, ヤコビ係数はシュミットの直交化によって定まるが, 直交化の過程で必要な内積はすべてモーメント列を用いて表すことができる. したがって, 写像 $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{J}$ が定義されて次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R}) & \\ M \swarrow & & \searrow J \\ \mathfrak{M} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{J} \end{array}$$

実は, $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{J}$ は全単射である [39, Chapter 1]. さらに, F^{-1} の具体的表現 (Accardi-Bożejko 公式) が知られている. ここでは, ヤコビ係数から確率分布を得るための公式を述べておく.

定理 5.5 $\mu \in \mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ のヤコビ係数を $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ とする. もし, μ がモーメント問題の一意解であれば,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(dx)}{z-x} = \frac{1}{z-\alpha_1} - \frac{\omega_1}{z-\alpha_2} + \frac{\omega_2}{z-\alpha_3} - \frac{\omega_3}{z-\alpha_4} + \dots \quad (5.4)$$

が成り立つ. ただし, 右辺の連分数は $\{\text{Im } z \neq 0\}$ で収束する.

(5.4) の左辺は, (有限なモーメントをもつとは限らない) すべての確率分布 μ に対して定義される. これを μ のスチルチェス変換といい, $G_\mu(z)$ と書く. $G_\mu(z)$ は $\{\text{Im } z \neq 0\}$ で正則である. このとき,

$$-\frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \int_s^t \text{Im } G_\mu(x+iy) dx = \mu(\{s\}) + \mu(\{t\}) + 2\mu((s, t)), \quad s < t$$

が成り立つ. これをスチルチェス逆変換という. μ の絶対連続部分 $\rho(x)dx$ は,

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi} \lim_{y \rightarrow +0} \text{Im } G_\mu(x+iy)$$

で与えられる.

さらに, (5.4) の第 n 近似分数

$$\frac{1}{z - \alpha_1} - \frac{\omega_1}{z - \alpha_2} - \frac{\omega_2}{z - \alpha_3} - \frac{\omega_3}{z - \alpha_4} - \cdots - \frac{\omega_n}{z - \alpha_{n+1}} = \frac{Q_n(z)}{P_{n+1}(z)}$$

で, 分母・分子ともに最高次の係数を 1 と基準化すれば, 分母の多項式が μ に付随する直交多項式に一致する. なお, $\{Q_n\}$ は μ の (または $\{P_n\}$ の) 随伴直交多項式と呼ばれる.

5.2 実確率変数の量子分解

古典確率変数 X で分布 μ が $\mathfrak{P}_{\text{fm}}(\mathbb{R})$ に属するものを考えよう. この μ に付随する直交多項式を $\{P_n\}$, ヤコビ係数を $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ とする. $\{\omega_n\}$ はヤコビ数列なので, それに付随する相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を考える. 等距離作用素 $U : \Gamma(\mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$ が

$$U : \sqrt{\omega_n \cdots \omega_2 \omega_1} \Phi_n \mapsto P_n$$

によって定義される (U は必ずしもユニタリではないことに注意). $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ において x による掛け算作用素を Q で表す. 相互作用フォック空間の定義と直交多項式の満たす 3 項間漸化式を比較すれば,

$$Q = U(B^+ + B^- + B^\circ)U^*, \quad B^\circ = \alpha_{N+1},$$

が容易にわかる. したがって,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx) = \langle P_0, Q^m P_0 \rangle = \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Phi_0 \rangle, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

一方, μ は X の分布なので, (5.5) は $\mathbf{E}(X^m)$ に等しい. よって, 代数的確率変数として

$$X = B^+ + B^- + B^\circ \quad (5.6)$$

が成り立つ. これを X の量子分解, $\{B^+, B^-, B^\circ\}$ をその量子成分という.

例 5.6 (Gauss 型確率変数) ボゾン・フォック空間 $(\Gamma_{\text{boson}}(\mathbb{C}), B^\pm)$ において,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

右辺の分布は標準 Gauss 分布である.

例 5.7 (Poisson 型確率変数) パラメータ $\lambda > 0$ の Poisson 分布に関する直交多項式は Charlier 多項式であり, 付随する Jacobi 係数は $\{\alpha_n = \lambda + n - 1\}$, $\{\omega_n = \lambda n\}$ で与えられる. ボゾン・フォック空間 $(\Gamma_{\text{boson}}(\mathbb{C}), B^\pm)$ を用いて, パラメータ λ の Poisson 型確率変数 X_λ の代数的実現

$$X_\lambda = \sqrt{\lambda} B^+ + \sqrt{\lambda} B^- + N + \lambda = (B^+ + \sqrt{\lambda})(B^- + \sqrt{\lambda})$$

が得られる. Gauss 型 (例 5.6) および Poisson 型確率変数が, とともにボゾン・フォック空間 $(\Gamma_{\text{boson}}(\mathbb{C}), B^\pm)$ 上で表現されるところが興味深い.

例 5.8 (ベルヌイ型確率変数) $P(X = +1) = P(X = -1) = 1/2$ で定義されるベルヌイ型確率変数 X を考える. その分布 $\mu = (\delta_{+1} + \delta_{-1})/2$ に付随するヤコビ係数は, $\{\alpha_1 = \alpha_2 = 0\}$, $\{\omega_1 = 1, \omega_2 = \dots = 0\}$ で与えられる. したがって, 考えるべき相互作用フォック空間は 2 次元である. $\{\Phi_0, \Phi_1\}$ を標準基底として X の量子分解を行列表示すれば,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

すなわち, フェルミオン・フォック空間 $(\Gamma_{\text{fermion}}(\mathbb{C}), B^\pm)$ に帰着し,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m (\delta_{-1} + \delta_{+1})(dx), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

例 5.9 (半円則) 自由フォック空間 $(\Gamma_{\text{free}}(\mathbb{C}), B^\pm)$ において,

$$\langle \Phi_0, (B^+ + B^-)^m \Phi_0 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} x^m \sqrt{4 - x^2} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

右辺の確率分布は半円則 (例 5.4) である.

問 5.10 例 5.6–5.9 の主張を確認せよ.

注意 5.11 ここでは, 古典確率空間で定義された確率変数 X の量子分解として話を進めてきたが, 代数的確率空間における実確率変数 a も同様にして量子分解される.

X や a の分布を議論するとき, それらが生成する可換 $*$ -代数を使っているといえる. 確率変数を量子分解して量子成分を取り出すと, それらは互いに非可換である. したがって, 量子成分を扱うためには, その可換 $*$ -代数の非可換拡張を考えることになる. 問題によっては, この非可換拡張が有効に使えるのである. この実例を次節で扱う.

5.3 グラフの階層化と隣接行列の量子分解

グラフ $G = (V, E)$ には原点 $o \in V$ が定まっているものとする. このとき, グラフには自然な階層構造が導入される:

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{x \in V; \partial(o, x) = n\}. \quad (5.7)$$

ある番号 $m \geq 1$ で $V_m = \emptyset$ となれば, その先 $n \geq m$ すべてで $V_n = \emptyset$ となる. (5.7) にしたがって, 隣接行列 A の量子成分を定義しよう. $x \in V_n$ として

$$(A^\epsilon)_{yx} = \begin{cases} A_{yx} = 1, & y \sim x \text{ かつ } y \in V_{n+\epsilon}, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases} \quad \epsilon \in \{+, -, 0\}.$$

ただし, $n + \epsilon$ は $\epsilon = +, -, \circ$ に応じて, $n + 1, n - 1, n$ を意味する (図 5). 明らかに, $(A^+)^* = A^-, (A^\circ)^* = A^\circ$ および

$$A = A^+ + A^- + A^\circ \quad (5.8)$$

が成り立つ. (5.8) を A の量子分解という. 量子分解はグラフの階層化 (つまり, 原点 $o \in V$ のとり方) に依存して定まる.

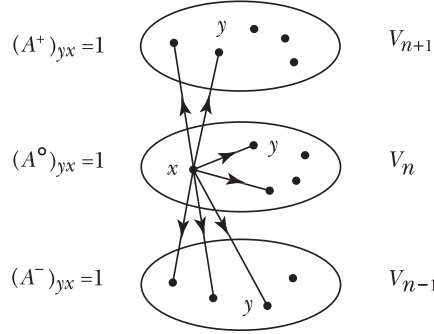


図 5: 量子分解: $A = A^+ + A^- + A^\circ$

次に, $V_n \neq \emptyset$ なる $n \geq 0$ に対して

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x$$

とおくと, $\{\Phi_n\}$ は $\ell^2(V)$ の正規直交系となる. $\{\Phi_n\}$ によって張られる $\ell^2(V)$ の閉部分空間 $\Gamma(G)$ をグラフ G の階層化 (5.7) に付随するフォック空間と呼ぶことにする. 一般には, $\Gamma(G)$ は, A の量子成分に関して不変であるとは限らない. 興味があるのは,

- (i) $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して不変である場合;
- (ii) $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して漸近的に不変である場合;

である. (i) のときは, $(\Gamma(G), A^\pm)$ が相互作用フォック空間になり, $A = A^+ + A^- + A^\circ$ の分布は前節で述べた方法で求めることができる. 特に, 距離正則グラフは条件 (i) を満たす. (ii) については, 節をあらためて述べる.

例 5.12 (ケステン分布) 次数 $\kappa \geq 2$ の等質樹木 \mathcal{T}_κ の隣接行列を $A = A_\kappa$ とする. 原点 o を定め, 付随するフォック空間 $\Gamma(\mathcal{T}_\kappa)$ とその正規直交基底 $\{\Phi_n\}_{n=0}^\infty$ を上のように定める. 簡単な計算によって,

$$\begin{cases} A\Phi_0 = \sqrt{\kappa} \Phi_1, \\ A\Phi_1 = \sqrt{\kappa} \Phi_0 + \sqrt{\kappa-1} \Phi_2, \\ A\Phi_n = \sqrt{\kappa-1} \Phi_{n-1} + \sqrt{\kappa-1} \Phi_{n+1}, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (5.9)$$

がわかる. 明らかに, $\Gamma(\mathcal{T}_\kappa)$ は A の量子成分 A^\pm で不変である. よって, $(\Gamma(\mathcal{T}_\kappa), A^\pm)$ は相互作用フォック空間であり, (5.9) から Jacobi 係数 $\{\alpha_n \equiv 0\}$, $\{\omega_1 = \kappa, \omega_2 = \omega_3 = \dots = \kappa - 1\}$ が求まる. これらを係数とする連分数 (5.4) を計算すれば, A の Φ_0 における分布が求められる:

$$\langle \Phi_0, A^m \Phi_0 \rangle = \int_{-2\sqrt{\kappa-1}}^{+2\sqrt{\kappa-1}} x^m \rho_\kappa(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.10)$$

$$\rho_\kappa(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa \sqrt{4(\kappa-1) - x^2}}{\kappa^2 - x^2}, \quad |x| \leq 2\sqrt{\kappa-1}.$$

Kesten [46] は, N 個の生成元をもつ自由群の Cayley グラフ (次数 $2N$ の等質樹木) において, 推移行列 $P_N = (2N)^{-1} A_{2N}$ の δ_e における分布を導いた. それは, (5.10) に簡単なスケール変換を施すことで得られる.

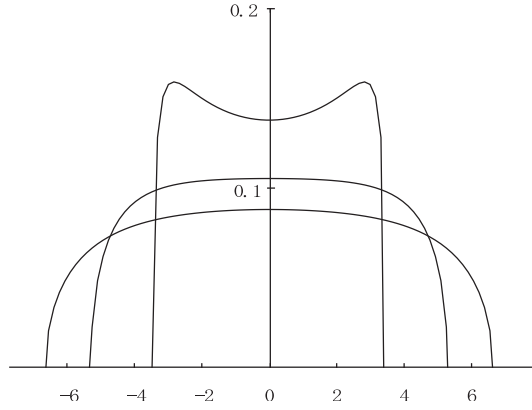


図 6: ケステン分布: $\rho_4, \rho_8, \rho_{12}$

ケステン分布を分散が 1 になるように正規化して, $\kappa \rightarrow \infty$ とすると半円則に収束することが, その具体的な表式からすぐわかる. これは, グラフの自由積と自由独立性に関する中心極限定理の特別な場合にあたる.

5.4 $\Gamma(G)$ が A の量子成分に関して漸近的に不変である場合

整数格子 \mathbb{Z}^N で説明しよう. 隣接行列を A_N とする. 原点を $o = (0, \dots, 0)$ とし, δ_o における A_N のスペクトル分布の高次元極限 $N \rightarrow \infty$ に興味がある. \mathbb{Z}^N を

$$\mathbb{Z}^N = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{x \in \mathbb{Z}^N; \partial(x, o) = n\},$$

のように階層化して, 各階層に対応する単位ベクトル $\Phi_n \in \ell^2(\mathbb{Z}^N)$ を

$$\Phi_n = |V_n|^{-1/2} \sum_{x \in V_n} \delta_x, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

で定義する. 任意の頂点 $x \in V$ に隣接する点は, すぐ上または下の階層にだけ存在することから, 隣接行列 A_N の量子分解は,

$$A_N = A_N^+ + A_N^-$$

で与えられる. 簡単な考察によって,

$$\begin{aligned} \frac{A_N^+}{\sqrt{2N}} \Phi_n &= \sqrt{n+1} \Phi_{n+1} + O(N^{-1/2}), \\ \frac{A_N^-}{\sqrt{2N}} \Phi_n &= \sqrt{n} \Phi_{n-1} + O(N^{-1}), \end{aligned}$$

が得られる. つまり, $\Gamma(\mathbb{Z}^N)$ は A_N の量子成分 A_N^\pm で不変ではないが, $N \rightarrow \infty$ において「ほぼ」不変である. そのおかげで,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N^\pm}{\sqrt{2N}} = B^\pm$$

はボゾン・フォック空間の生成・消滅作用素の作用に一致する. さらに, ボゾン・フォック空間において $B^+ + B^-$ の真空状態における分布は標準ガウス分布であることが知られているので,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \delta_o, \left(\frac{A_N}{\sqrt{2N}} \right)^m \delta_o \right\rangle &= \langle \Omega, (B^+ + B^-)^m \Omega \rangle_{\text{Boson}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m e^{-x^2/2} dx, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, Ω はボゾン・フォック空間の真空ベクトルである. つまり, 整数格子 \mathbb{Z}^N の隣接行列 A_N の真空状態におけるスペクトル分布は標準ガウス分布に漸近する. この結果は可換独立性を用いた議論でも導かれている (4.1 節).

上に述べてきた \mathbb{Z}^N に対する考察を一般化して, 成長する正則グラフ $G^{(\nu)} = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})$ の漸近的スペクトルを求めることができる. ここで ν は成長を表すパラメータであり, ある有向集合を走るものとする. 以降では, 考える極限を $\nu \rightarrow \infty$ のように簡単に書くことにする. まず,

$$\omega_\epsilon(x) = \{y \in V; \partial(o, y) = \partial(o, x) + \epsilon\}, \quad \epsilon \in \{+, -, o\}$$

として, ω_ϵ の各階層 V_n における 3 つの統計量を

$$\begin{aligned} M(\omega_\epsilon | V_n) &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} |\omega_\epsilon(x)| \\ \Sigma^2(\omega_\epsilon | V_n) &= \frac{1}{|V_n|} \sum_{x \in V_n} \{|\omega_\epsilon(x)| - M(\omega_\epsilon | V_n)\}^2 \end{aligned}$$

$$L(\omega_\epsilon|V_n) = \max\{|\omega_\epsilon(x)|; x \in V_n\}$$

で定義する. 次に, これらの統計量が $\nu \rightarrow \infty$ でどのように挙動するか仮定をおく. 簡単のため $\kappa(\nu) = \deg(G^{(\nu)})$ とおく.

$$(A1) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \kappa(\nu) = \infty.$$

(A2) 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} M(\omega_-|V_n^{(\nu)}) \equiv \omega_n < \infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Sigma^2(\omega_-|V_n^{(\nu)}) = 0, \quad \sup_{\nu} L(\omega_-|V_n^{(\nu)}) < \infty.$$

(A3) 各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{M(\omega_\circ|V_n^{(\nu)})}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \equiv \alpha_{n+1} < \infty, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Sigma^2(\omega_\circ|V_n^{(\nu)})}{\kappa(\nu)} = 0, \quad \sup_{\nu} \frac{L(\omega_\circ|V_n^{(\nu)})}{\sqrt{\kappa(\nu)}} < \infty.$$

定理 5.13 (量子中心極限定理 [40]) $\{G^{(\nu)} = (V^{(\nu)}, E^{(\nu)})\}$ を成長する正則グラフで (A1)–(A3) を満たすものとする. $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Psi_n\}, B^+, B^-)$ を $\{\omega_n\}$ に付随する相互作用フォック空間とし, B° を $\{\alpha_n\}$ に付随する対角作用素とする. このとき, すべての $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \{+, -, \circ\}$ と $m = 1, 2, \dots, j, n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\lim_{\nu} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A_\nu^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A_\nu^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \Phi_n^{(\nu)} \right\rangle = \langle \Psi_j, B^{\epsilon_m} \cdots B^{\epsilon_1} \Psi_n \rangle$$

が成り立つ.

証明 道筋だけ記す. A_ν^ϵ や $\kappa(\nu)$ の表記で ν を省略してある.

(1) 量子成分の作用を計算する. $\epsilon \in \{+, -, \circ\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$\frac{A_\nu^\epsilon}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n = \gamma_{n+\epsilon}^\epsilon \Phi_{n+\epsilon} + S_{n+\epsilon}^\epsilon$$

とすると,

$$\gamma_n^+ = M(\omega_-|V_n) \left(\frac{|V_n|}{\kappa|V_{n-1}|} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n^- = M(\omega_+|V_n) \left(\frac{|V_n|}{\kappa|V_{n+1}|} \right)^{1/2}, \quad \gamma_n^\circ = \frac{M(\omega_\circ|V_n)}{\sqrt{\kappa}}.$$

(2) 各階層の大きさを評価する:

$$|V_n| = \left\{ \prod_{k=1}^n M(\omega_-|V_k) \right\}^{-1} \kappa^n + O(\kappa^{n-1}).$$

(3) γ_n^ϵ の極限を計算する:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_n^+ = \sqrt{\omega_n}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_n^- = \sqrt{\omega_{n+1}}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \gamma_n^\circ = \alpha_{n+1}.$$

(4) 量子成分の作用を計算する:

$$\begin{aligned} \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_1}}{\sqrt{\kappa}} \Phi_n &= \gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \gamma_{n+\epsilon_1+\epsilon_2}^{\epsilon_2} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m}^{\epsilon_m} \Phi_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_m} \\ &+ \sum_{k=1}^m \underbrace{\gamma_{n+\epsilon_1}^{\epsilon_1} \cdots \gamma_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_{k-1}}^{\epsilon_{k-1}}}_{(k-1) \text{ times}} \underbrace{\frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa}} \cdots \frac{A^{\epsilon_{k+1}}}{\sqrt{\kappa}}}_{(m-k) \text{ times}} S_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}^{\epsilon_k}. \end{aligned}$$

(5) (4) で現れる誤差項を評価する:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\langle \Phi_j^{(\nu)}, \frac{A^{\epsilon_m}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} \cdots \frac{A^{\epsilon_{k+1}}}{\sqrt{\kappa(\nu)}} S_{n+\epsilon_1+\cdots+\epsilon_k}^{\epsilon_k} \right\rangle = 0.$$

以上で, $A_\nu^{\epsilon_m} / \sqrt{\kappa(\nu)}$ の作用が, 相互作用フォック空間の作用に収束することがわかり, 結論が導かれる. ■

定理 5.13 を隣接行列 $A_\nu = A_\nu^+ + A_\nu^- + A_\nu^\circ$ に適用すれば, 次の結果が得られる.

定理 5.14 定理 5.13 の仮定の下で,

$$\begin{aligned} \lim_{\nu} \left\langle \delta_o, \left(\frac{A_\nu}{\sqrt{\deg(G(\nu))}} \right)^m \delta_o \right\rangle &= \langle \Phi_0, (B^+ + B^- + B^\circ)^m \Psi_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \mu(dx), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

よって, $A_\nu / \sqrt{\deg(G(\nu))}$ の真空状態におけるスペクトル分布は, ヤコビ係数 $(\{\omega_n\}, \{\alpha_n\})$ で定まる確率分布に (モーメントの意味で) 収束する.

注意 5.15 定理 5.13–5.14 は Q 行列による真空状態の 1 径数変形に拡張される [40].

いくつかの例が次節の表にある.

5.5 コメント

隣接行列 A_ν の量子成分 A_ν^ϵ に対して, その漸近挙動を記述する相互作用フォック空間 $(\Gamma(\mathbb{C}), \{\Phi_n\}, B^+, B^-)$ を構成し, $B^+ + B^- + B^\circ$ の分布から A_ν の漸近的スペクトルを導出した. この方法によれば, 組合せ論的な問題が極限移行した後に現れるので, 有限の ν で直面する組合せ論的な問題 (こちらのほうが込み入っていることが多い) を回避することができる.

この手法が有効であるのは, $\Gamma(G_\nu)$ が A_ν^ϵ に関して「漸近的に」不変であるときに限る. そうでないときに量子分解の手法を拡張することは興味深い問題である. 多変数の直交多項式も関連してくるであろう.

本稿で扱ってきた「グラフの漸近的スペクトル解析」の端緒は Hora [31] にある. そこでは, 量子分解によらず, 古典的な結果を援用して距離正則グラフの隣接行列の漸近的スペ

クトルが導出された。それに示唆されて, Hashimoto–Obata–Tabei [28] は量子分解の方法をハミング・グラフに適用し, 古典的手法に現れる組合せ論的議論なしに極限分布 (Gauss 分布と Poisson 分布) が導出できることを示した。Hashimoto [26] は同様な方法を Cayley グラフに適用して一般論を展開した。量子分解のアイデアそのものは素朴なもので, これまでもさまざまな文脈に現れているが, 隣接行列や古典確率変数を量子確率論の枠組みで解析するための方法として, 「量子分解」という言葉を初めて使ったのは Hashimoto [26] である。

5.4 節で述べた成長グラフに対する量子中心極限定理は, 個別の議論で得られた多くの具体例を統一するものとなった。例をいくつか示す。

グラフ	IFS	真空状態	その 1 径数変形
Hamming graphs $H(d, N)$	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian ($N/d \rightarrow 0$) Poisson ($N/d \rightarrow \lambda^{-1} > 0$)	Gaussian or Poisson
Johnson graphs $J(v, d)$	$\omega_n = n^2$	exponential ($2d/v \rightarrow 1$) geometric ($2d/v \rightarrow p \in (0, 1)$)	‘Poissonization’ of exponential distribution
odd graphs O_k	$\omega_{2n-1} = n$ $\omega_{2n} = n$	two-sided Rayleigh	?
homogeneous trees \mathcal{T}_κ	$\omega_n = 1$ (free)	Wigner semicircle	free Poisson
integer lattices \mathbb{Z}^N	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian	Gaussian
symmetric groups \mathfrak{S}_n (Coxeter)	$\omega_n = n$ (Boson)	Gaussian	Gaussian
Coxeter groups (Fendler)	$\omega_n = 1$ (free)	Wigner semicircle	free Poisson
Spidernets $S(a, b, c)$	$\omega_1 = 1$ $\omega_2 = \dots = q$	free Meixner law	(free Meixner law)

成長するグラフは複雑ネットワークのモデルとしても興味がある。グラフの成長を, 各時刻で「独立増分」が付け加わってゆくような形で定式化できると面白いと思う。本稿で論じてきたグラフの「積構造」と量子確率論の「独立性」の関連を発展させることでヒントが得られるかも知れない。それに関連して, ランダム・グラフへの適用も興味深い研究テーマであろう。

参考文献

- [1] L. Accardi, A. Ben Ghorbal and N. Obata: *Monotone independence, comb graphs and Bose–Einstein condensation*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **7** (2004), 419–435.

- [2] L. Accardi and M. Bożejko: *Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 663–670.
- [3] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Notions of independence related to the free group*, *Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **1** (1998), 201–220.
- [4] L. Accardi, Y. Hashimoto and N. Obata: *Singleton independence*, *Banach Center Publ.* **43** (1998), 9–24.
- [5] L. Accardi, Y.-G. Lu and I. Volovich: “Quantum Theory and Its Stochastic Limit,” Springer–Verlag, 2002.
- [6] 明出伊類似・尾畑伸明: 量子確率論の基礎, 数理情報科学シリーズ 21, 牧野書店, 2003.
- [7] L. Arnold: *On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices*, *J. Math. Anal. Appl.* **20** (1967), 262–268.
- [8] M. Bauer and O. Golinelli: *Random incidence matrices: moments of the spectral density*, *J. Statist. Phys.* **103** (2001), 301–337.
- [9] N. Biggs: “Algebraic Graph Theory (2nd Ed.),” Cambridge University Press, 1993.
- [10] B. Bollobas: “Random Graphs,” Cambridge Studies in Advanced Mathematics 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [11] M. Bożejko: *Uniformly bounded representations of free groups*, *J. Reine Angew. Math.* **377** (1987), 170–186.
- [12] M. Bożejko: *Positive-definite kernels, length functions on groups and noncommutative von Neumann inequality*, *Studia Math.* **XCIV** (1989), 107–118.
- [13] M. Bożejko, B. Kümmerer and R. Speicher: *q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects*, *Commun. Math. Phys.* **185** (1997), 129–154.
- [14] M. Bożejko and R. Speicher: *ψ -independence and symmetrized white noise*, in “Quantum Probability and Related Topics VI (L. Accardi, Ed.),” pp. 170–186, World Scientific, Singapore, 1991.
- [15] M. Bożejko and J. Wysoczanski: *Remarks on t-transformations of measures and convolutions*, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.* **37** (2001), 737–761.
- [16] R. Burioni, D. Cassi, M. Rasetti, P. Sodano and A. Vezzani: *Bose-Einstein condensation on inhomogeneous complex networks*, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **34** (2001), 4697–4710.

- [17] D. M. Cvetković, M. Doob and H. Sachs: “Spectra of Graphs,” Academic Press, 1979.
- [18] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukhin: *Random networks: eigenvalue spectra*, Physica A **338** (2004), 76–83.
- [19] T. S. Chihara: “An Introduction to Orthogonal Polynomials,” Gordon and Breach, 1978.
- [20] D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata: *Quantum stochastic analysis via white noise operators in weighted Fock space*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 241–272.
- [21] A. M. Cockroft and R. L. Hudson: *Quantum mechanical Wiener processes*, J. Multivariate Anal. **7** (1977), 107–124.
- [22] D. D. Cushen and R. L. Hudson: *A quantum mechanical central limit theorem*, J. Appl. Probability **8** (1971), 454–469.
- [23] U. Franz: *Unification of boolean, monotone, anti-monotone, and tensor independence and Lévy processes*, Math. Z. **243** (2003), 779–816.
- [24] N. Giri and W. von Waldenfels: *An algebraic version of the central limit theorem*, Z. Wahr. Verw. Gebiete **42** (1978), 129–134.
- [25] Y. Hashimoto: *Deformations of the semicircle law derived from random walks on free groups*, Prob. Math. Stat. **18** (1998), 399–410.
- [26] Y. Hashimoto: *Quantum decomposition in discrete groups and interacting Fock spaces*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **4** (2001), 277–287.
- [27] Y. Hashimoto, A. Hora and N. Obata: *Central limit theorems for large graphs: Method of quantum decomposition*, J. Math. Phys. **44** (2003), 71–88.
- [28] Y. Hashimoto, N. Obata and N. Tabei: *A quantum aspect of asymptotic spectral analysis of large Hamming graphs*, in “Quantum Information III (T. Hida and K. Saitô, Eds.),” pp. 45–57, World Scientific, 2001.
- [29] 日合文雄: *作用素環の自由積と自由確率論*, 数学 **51** (1999), 377–394.
- [30] F. Hiai and D. Petz: “The Semicircle Law, Free Random Variables and Entropy,” Amer. Math. Soc., 2000.
- [31] A. Hora: *Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs*, Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 221–246.

- [32] A. Hora: *Central limit theorem for the adjacency operators on the infinite symmetric group*, Commun. Math. Phys. **195** (1998), 405–416.
- [33] A. Hora: *Gibbs state on a distance-regular graph and its application to a scaling limit of the spectral distributions of discrete Laplacians*, Probab. Theory Relat. Fields **118** (2000), 115–130.
- [34] A. Hora: *A noncommutative version of Kerov’s Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, in “Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics (A. M. Vershik, Ed.),” pp. 77–88, Lect. Notes in Math. Vol. 1815, Springer–Verlag, 2003.
- [35] A. Hora: *Scaling limit for Gibbs states for Johnson graphs and resulting Meixner classes*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **6** (2003), 139–143.
- [36] 洞 彰人: *対称群の表現と漸近的組合せ論*, 数学 **57** (2005), 242–254.
- [37] A. Hora and N. Obata: *Quantum decomposition and quantum central limit theorem*, in “Fundamental Problems in Quantum Physics (L. Accardi and S. Tasaki, Eds.),” pp. 284–305, World Scientific, 2003.
- [38] A. Hora and N. Obata: *An interacting Fock space with periodic Jacobi parameter obtained from regular graphs in large scale limit*, in “Quantum Information V (T. Hida and K. Saitô, Eds.),” pp. 121–144, World Scientific, 2006.
- [39] A. Hora and N. Obata: “Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs,” Springer, 2007.
- [40] A. Hora, N. Obata: *Asymptotic spectral analysis of growing regular graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 899–923.
- [41] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy: *Quantum Itô’s formula and stochastic evolutions*, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 301–323.
- [42] D. Igarashi and N. Obata: *Asymptotic spectral analysis of growing graphs: Odd graphs and spidernets*, Banach Center Publications **73** (2006), 245–265.
- [43] U. C. Ji and N. Obata: *Quantum white noise calculus*, in “Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads (N. Obata, T. Matsui and A. Hora, Eds.),” pp. 143–191, World Scientific, 2002.
- [44] U. C. Ji and N. Obata: *Annihilation-derivative, creation-derivative and representation of quantum martingales*, Commun. Math. Phys. **286** (2009), 751–775.

- [45] S. Kerov: *Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, C. R. Acad. Sci. Paris **316** Série I (1993), 303–308.
- [46] H. Kesten: *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 336–354.
- [47] R. Lenczewski: *On sums of q -independent $SU_q(2)$ quantum variables*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 127–134.
- [48] R. Lenczewski: *Unification of independence in quantum probability*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **1** (1998), 383–405.
- [49] R. Lenczewski: *On noncommutative independence*, in “QP–PQ: Quantum Probab. White Noise Anal., Vol. 18,” pp. 320–336, World Scientific, 2005.
- [50] S. Liang, N. Obata and S. Takahashi: *Asymptotic spectral analysis of generalized Erdős–Rényi random graphs*, Banach Center Publications **78** (2007), 211–229.
- [51] Y.-G. Lu: *An interacting free Fock space and the arcsine law*, Probab. Math. Stat. **17** (1997), 149–166.
- [52] P.-A. Meyer: “Quantum Probability for Probabilists,” Lect. Notes in Math. Vol. 1538, Springer–Verlag, 1993.
- [53] N. Muraki: *Noncommutative Brownian motion in monotone Fock space*, Commun. Math. Phys. **183** (1997), 557–570.
- [54] N. Muraki: *Monotonic convolution and monotonic Lévy–Hinčin formula*, preprint, 2000.
- [55] N. Muraki: *Monotonic independence, monotonic central limit theorem and monotonic law of small numbers*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **4** (2001), 39–58.
- [56] N. Muraki: *The five independences as quasi-universal products*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **5** (2002), 113–134.
- [57] K. R. Parthasarathy: “An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,” Birkhäuser, 1992.
- [58] N. Obata: *Quantum probabilistic approach to spectral analysis of star graphs*, Interdiscip. Inform. Sci. **10** (2004), 41–52.
- [59] 尾畑伸明: 量子確率論における独立性とグラフのスペクトル解析, 数学 **57** (2005), 1–20.

- [60] N. Obata: *Positive Q -matrices of graphs*, *Studia Math.* **179** (2007), 81–97.
- [61] N. Obata: *Notions of independence in quantum probability and spectral analysis of graphs*, *Amer. Math. Soc. Transl.* **223** (2008), 115–136.
- [62] N. Obata, T. Matsui and A. Hora (Eds.): “Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads,” World Scientific, 2002.
- [63] F. Oravecz: *Fermi convolution*, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **5** (2002), 235–242.
- [64] K. Saigo: 単調中心極限定理の簡潔な証明, private communication, 2008.
- [65] N. Saitoh and H. Yoshida: *A q -deformed Poisson distribution based on orthogonal polynomials*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000), 1435–1444.
- [66] N. Saitoh and H. Yoshida: *q -deformed Poisson random variables on q -Fock space*, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 5767–5772.
- [67] M. Schürmann: “White Noise on Bialgebras,” *Lect. Notes in Math.* Vol. 1544, Springer–Verlag, 1993.
- [68] J. A. Shohat and J. D. Tamarkin: “The Problem of Moments,” *Amer. Math. Soc.*, 1943.
- [69] R. Speicher: *On universal products*, in “Free Probability Theory (D. Voiculescu, Ed.),” pp. 257–266, *Fields Inst. Commun.* Vol. 12, *Amer. Math. Soc.*, 1997.
- [70] R. Speicher and R. Woroudi: *Boolean convolution*, in “Free Probability Theory (D. Voiculescu, Ed.),” pp. 267–279, *Fields Inst. Commun.* Vol. 12, *Amer. Math. Soc.*, 1997.
- [71] H. van Leeuwen and H. Maassen: *A q deformation of the Gauss distribution*, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 4743–4756.
- [72] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica: “Free Random Variables,” *CRM Monograph Series* 1, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1992.
- [73] H. S. Wall: “Analytic Theory of Continued Fractions,” *AMS Chelsea Publ.*, 1948.
- [74] E. P. Wigner: *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, *Ann. of Math. (2)* **62** (1955), 548–564.
- [75] E. P. Wigner: *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions II*, *Ann. of Math. (2)* **65** (1957), 203–207.

- [76] E. P. Wigner: *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 325–327.
- [77] J. Wysoczański: *Monotonic independence associated with partially ordered sets*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **10** (2007), 17–41.
- [78] J. Wysoczański: *bm-independence and central limit theorems associated with symmetric cones*, Banach Center Publ. **78** (2007), 315–320,
- [79] J. Wysoczański: *bm-central limit theorems for positive definite real symmetric matrices*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. **11** (2008), 33–51.