数学概論 B 期末試験 (2006.07.10)

● 解答例はウェッブページに掲載する.

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 ×4 = 20 点]

(1) A は何行何列の行列か?

(2) A の $(2,3)$ 成分は何か?

(3) 行に関する基本変形を施して, A を階段行列に変形せよ.

(4) A の階数を求めよ.

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき, 次の行列を計算せよ. [5 点 ×4 = 20 点]

$$-2X \qquad XY \qquad YX \qquad Y^2 + Y$$

3. 行列 $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ について次の問に答えよ. [5 点 ×5 = 25 点]

(1) $(1,1)$ 余因子, $(1,2)$ 余因子, $(1,3)$ 余因子を求めよ.

(2) B の行列式を 1 行目に関する余因子展開を用いて求めよ.

(3) B の行列式をサラスの方法で求めよ.

4. 連立方程式 $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ 2x - y - 2z = 2 \end{cases}$ について以下の問に答えよ. [5 点 ×4 = 20 点]

(1) 係数行列を書け.

(2) 拡大係数行列を書け.

(3) 自由度を求めよ.

(4) 解を求めよ.

5. 次の行列が逆行列をもたないように x を定めよ. [15 点]

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

数学概論 B 期末試験 (2006.07.10) 解答例

1. (1) 3 行 4 列

(2) 0

(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(2)-(1)\times 4]{(3)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なお, 最後の階段行列は別の形もありうる.

(4) 階数は 2.

2.

$$-2X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad XY = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

YX は定義できない

$$Y^2 + Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (1)

$$(1,1)\text{ 余因子} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$(1,2)\text{ 余因子} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) = 1$$

$$(1,3)\text{ 余因子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

(2)

$$|B| = (-1)\times(-7) + 7\times 1 + 0\times 3 = 14.$$

(3)

$$\begin{aligned} |B| &= \{(-1)\times 1\times 3 + 0\times 1\times 5 + 2\times 7\times 2\} - \{0\times 1\times 2 + 3\times 7\times 1 + 5\times 2\times(-1)\} \\ &= 25 - 11 = 14. \end{aligned}$$

4. (1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(3) 拡大係数行列の基本変形を行う.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって, rank(係数行列) = rank(拡大係数行列) = 2. 未知数の個数は 3. よって,

$$\text{自由度} = 3 - 2 = 1.$$

(4) 拡大係数行列の最後の形から,

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + 4z = 2 \end{cases}$$

が得られる. 自由度 1 なので z を任意定数 k として,

$$x = -k + 2, \qquad y = -4k + 2, \qquad z = k \qquad (k\text{ は任意定数})$$

5. 行列式が 0 になるように x を定める.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x^2-9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} x^2-9 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4(x^2-9)\begin{vmatrix} -1 & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(x^2-9)(-1-x)$$

したがって, 求める x は $x = \pm 3, -1$.